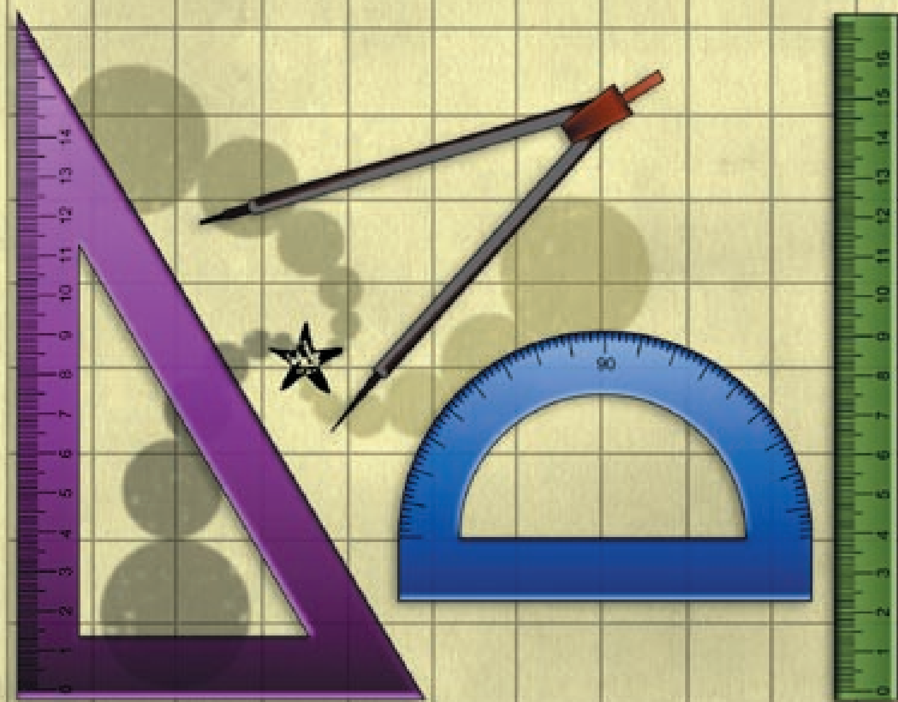
SERIE DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO Nº 12

GEOMETRÍA: CONCEPTOS Y CONSTRUCCIONES ELEMENTALES



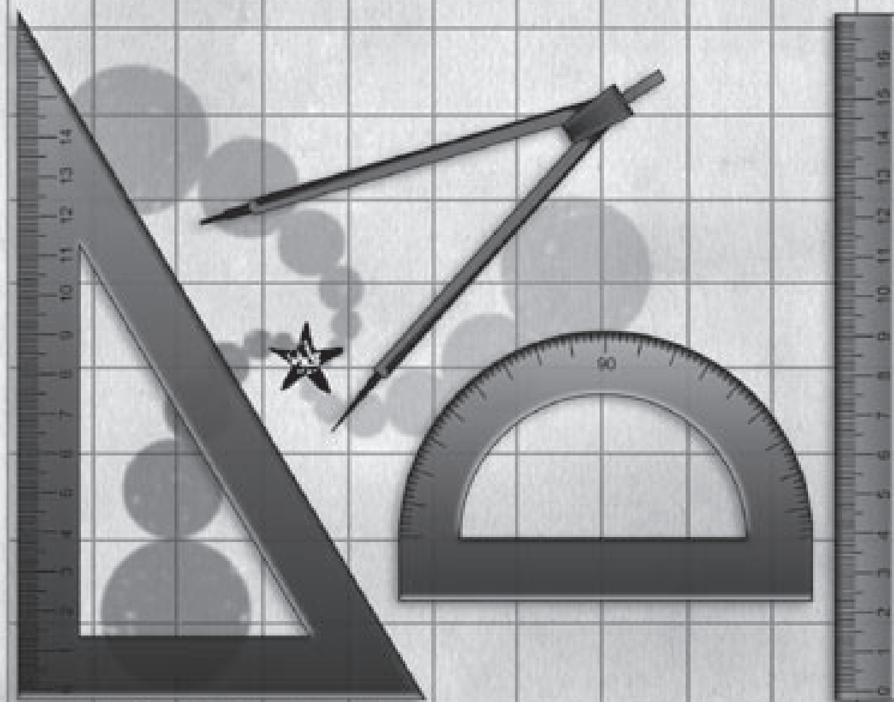






SERIE DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO Nº 12

GEOMETRÍA: CONCEPTOS Y CONSTRUCCIONES ELEMENTALES









POR MARTÍN ANDONEGUI ZABALA

372.7
And.
Geometría: conceptos y construcciones elementales
Federación Internacional Fe y Alegría, 2006
32 p.; 21,5 x 19 cm.
ISBN: 980-6418-86-7
Matemáticas, Geometría

"Para aprender permanentemente y ser capaz de investigar las situaciones y problemas, el educador debe asumirse como investigador en su acción y desde su acción. Esta tarea implica un cambio profundo para el educador que debe asumirse también como educando y aprendiz, que construye propuestas novedosas, duda y aprende de ellas."

Documento del XXVII Congreso
Internacional
Cochabamba (Bolivia)

EQUIPO EDITORIAL
Beatriz Borjas y Carlos Guédez

Dimensión: Desarrollo del pensamiento matemático
Cuaderno N° 12
Geometría: Conceptos y construcciones
Autor: Martín Andonegui Zabala

*Este libro se ha elaborado con el propósito de apoyar la práctica educativa de los cientos de educadores de Fe y Alegría. Su publicación se realizó en el marco del **Programa Internacional de Formación de Educadores Populares** desarrollado por la Federación Internacional Fe y Alegría desde el año 2001.*

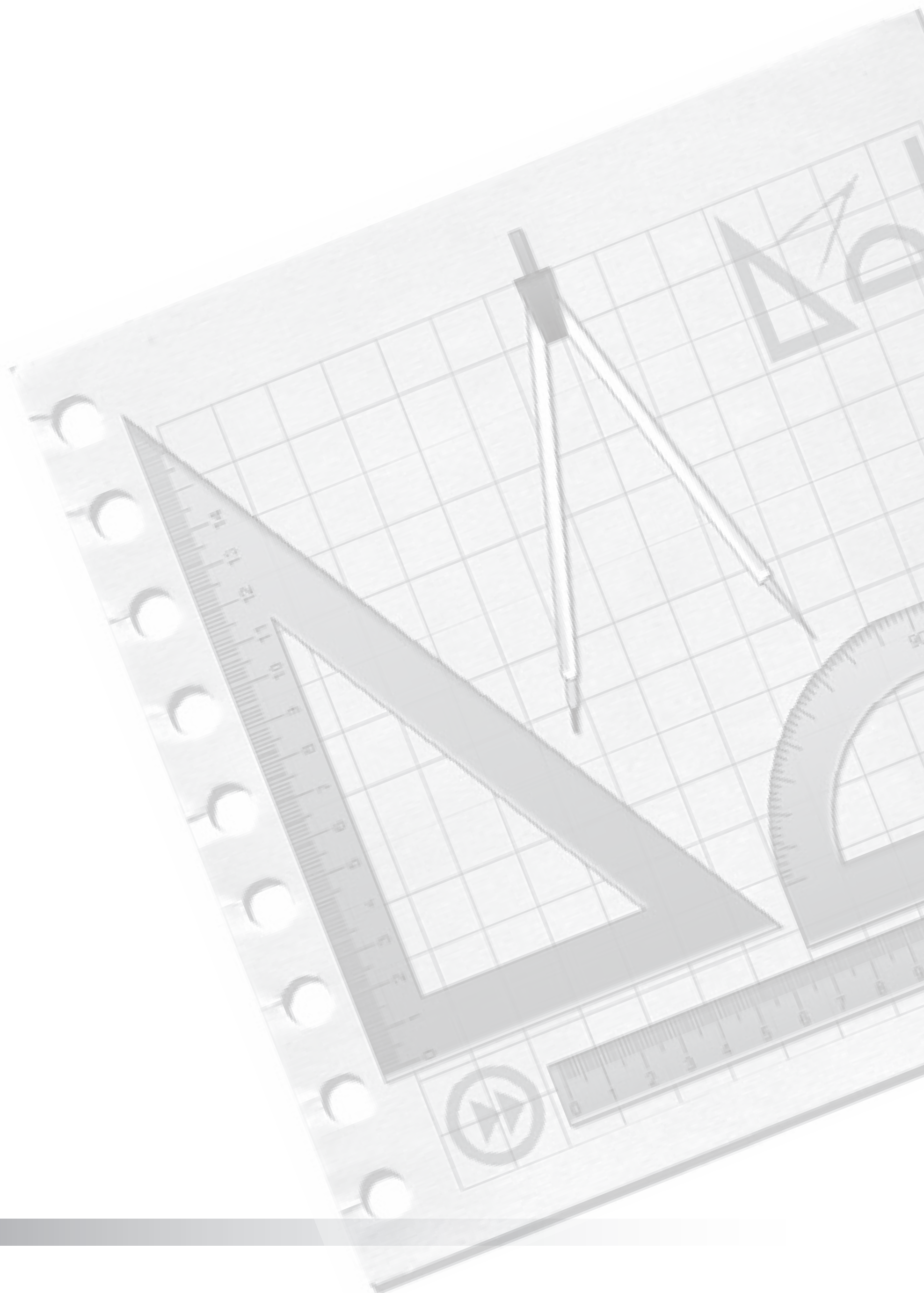
*Diseño y Diagramación: **Moira Olivar***
*Ilustraciones: **Corina Álvarez***
*Concepto gráfico: **Juan Bravo***
*Corrección de textos: **Carlos Guédez y Martín Andonegui***

Edita y distribuye: Federación Internacional de Fe y Alegría. Esquina de Luneta. Edif. Centro Valores, piso 7 Altagracia, Caracas 1010-A, Venezuela.
Teléfonos: (58) (212)5631776 / 5632048 / 5647423.
Fax: (58) (212) 5645096
www.feyalegria.org

© Federación Internacional Fe y Alegría

Depósito legal: lf 603 2006 510 3664
Caracas, abril 2006

Publicación realizada con el apoyo de:
Centro Magis - Instituto internacional para la educación superior en América Latina y el Caribe (IESALC) - Corporación Andina de Fomento (CAF)



introducción

A modo de introducción..., nuestro recordatorio

La sugerencia que proponíamos en el Cuaderno Nº 1 y que siempre presidirá los demás Cuadernos: Vamos a estudiar matemática, pero no lo vamos a hacer como si fuéramos simplemente unos alumnos que posteriormente van a ser evaluados, y ya. No. Nosotros somos docentes –docentes de matemática en su momento- y este rasgo debe caracterizar la forma de construir nuestro pensamiento matemático. ¿Qué significa esto?

• La presencia constante de la meta última de nuestro estudio: alcanzar unos niveles de conocimiento tecnológico y reflexivo, lo cual debe abrir ese estudio hacia la búsqueda de aplicaciones de lo aprendido, hacia el análisis de los sistemas que dan forma a nuestra vida y utilizan ese conocimiento matemático, y hacia criterios sociales y éticos para juzgarlos.

• Construir el conocer de cada tópico matemático pensando en cómo lo enseñamos en el aula, además de reflexionar acerca de cómo nuestro conocer limita y condiciona nuestro trabajo docente. De esta forma, integrar nuestra práctica docente en nuestro estudio.

• Como complemento a lo anterior, construir el conocer de cada tópico matemático pensando en cómo lo podemos llevar al aula. Para ello, tomar conciencia del proceso que seguimos para su construcción, paso a paso, así como de los elementos –cognitivos, actitudinales, emocionales...- que se presenten en dicho proceso. Porque a partir de esta experiencia reflexiva como estudiantes, podremos entender y evaluar mejor el desempeño de nuestros alumnos –a su nivel- ante los mismos temas.

• En definitiva, entender que la matemática es la base de su didáctica: la forma en que se construye el conocimiento matemático es una fuente imprescindible a la hora de planificar y desarrollar su enseñanza.

Y ahora, vamos al tema de este Cuaderno, la geometría.

1. ¿Qué es la Geometría?

Indudablemente, tenemos que empezar por hacernos esa pregunta. De entrada, todos tenemos cierta idea de las cosas de las que trata la geometría: del espacio y del plano; de puntos, rectas, segmentos, ángulos; de figuras tales como los triángulos, los cuadrados, las circunferencias..., con todos sus elementos; de cuerpos tales como la esfera, el cono, las pirámides...; de relaciones tales como el paralelismo y la perpendicularidad de rectas y segmentos, la simetría y la semejanza de figuras; de la medida de la longitud de un segmento, de la amplitud de un ángulo, del área de un polígono, del volumen de un sólido; etc. Por lo que se ve, un amplio campo de entornos, de ***objetos, relaciones y propiedades***. Todos ellos –y otros más- se estudian en esta área de la matemática que denominamos geometría.

Pudiéramos, pues, limitarnos a decir que la geometría es la rama de la matemática que estudia todos esos objetos, con sus elementos constitutivos, relaciones y propiedades. Pero, ¿es eso todo lo que se puede decir de lo que es la geometría? Más aún, ¿es eso lo primero que se puede decir acerca de lo que es?



Para acercarnos a lo que es la geometría, vamos a remontarnos unas cuantas preguntas más atrás: ¿Dónde encontramos esos objetos "geométricos"? ¿Quién y desde cuándo les puso esos nombres con los que ahora se presentan? En particular, ¿qué significa la palabra "geometría"? ¿Por qué y para qué se estudia?

Estas interrogantes nos regresan a la que nos formulamos en el Cuaderno 2 (El sistema numérico decimal): ¿Por qué la matemática? Recordamos lo que allí escribíamos (pp. 6 s.):

> ¿Y de dónde salió la matemática? ¿Qué elementos, qué "cosas" del entorno y del convivir diario pudieron aglutinarse para constituir esta disciplina singular y universal, en la que hoy día podemos descubrir campos particulares, tales como la aritmética, la geometría, el álgebra, el análisis, la probabilidad y la estadística, y otras más sutiles?
>
> Lynn A. Steen (1998) viene a responder a la pregunta anterior, justamente en términos referidos a la experiencia de las personas ante la naturaleza y la propia convivencia humana. ¿Cuáles son, pues, las "cosas" que se aglutinaron para conformar, con el paso del tiempo y con el esfuerzo perceptivo y reflexivo humano, las matemáticas? He aquí su respuesta:
>
> - Las *dimensiones* de los objetos y de sus representaciones
> - La *cantidad* presente en las cosas, en los fenómenos y en sus propiedades
> - La *incertidumbre* de algunos eventos
> - La *forma* de los objetos y de sus representaciones
> - El *cambio* presente en los fenómenos y en las cosas

Y en este panorama, ¿por dónde aparecen los objetos geométricos que mencionábamos antes? Fundamentalmente, a partir de la percepción de la ***dimensión*** y de la ***forma*** de los objetos y de sus representaciones (Senechal, 1998). La ***naturaleza*** es la primera surtidora de tales objetos. No debe costarnos mucho percibirlo, ni darnos cuenta de las regularidades que se presentan en muchos seres y elementos naturales, regularidades que sugieren determinadas formas en una, dos o tres dimensiones, así como ciertas propiedades y relaciones, tales como semejanzas, paralelismos y perpendicularidades, simetrías, etc.

Por ejemplo, es fácil percibir que hay objetos "redondos": ciertos frutos y semillas, algunas piedras, etc. Esos objetos, que pueden estar hechos de distintas sustancias y tener distintos tamaños, pesos, olores y colores comparten, sin embargo, una "regularidad": la de ser redondos. Pues bien, esa regularidad, abierta a cualquier sustancia, tamaño, peso, olor y color, puede destacarse en sí misma y convertirse en objeto de atención, de modo que pueda ser reconocida en cualquier objeto nuevo que tenga forma redonda (posteriormente, alguien llamará esfera a esa forma redonda...). Lo mismo sucede con otras formas: cilindros (los troncos de los árboles, los tallos de bambú, la parte central de ciertos huesos...), conos (algunos volcanes, ciertos árboles, los api-

lamientos de tierra que construyen las hormigas...), etc.

De igual forma puede hablarse de ciertas relaciones entre líneas: paralelismo (entre los troncos rectos de árboles cercanos, entre las dos orillas de un río...), perpendicularidad (entre el tronco de un árbol o el tallo de una planta y el suelo...). O de relaciones dentro de una misma figura, como la simetría (en algunas hojas, flores y frutos; en la forma externa de los peces, pájaros, mariposas...). O de relaciones entre cuerpos o figuras, como la semejanza (entre objetos grandes y pequeños de la misma especie...).

Pero la naturaleza no es la única fuente de estos objetos geométricos. También lo es la ***cultura*** de todos los pueblos. Las formas geométricas están presentes en muchos de los artefactos que se presentan en todas las culturas, desde sus comienzos y a lo largo de su evolución histórica hasta nuestros días: Artefactos como los edificios, viviendas, vehículos de transporte, puentes y vías de comunicación; o como los utensilios domésticos, los utilizados para la caza y pesca, y para los diversos oficios productivos; o como la ropa y tantos otros... Sin olvidar el inmenso y deslumbrante mundo del arte, en el que las formas y relaciones geométricas tienen una presencia inmemorial en la arquitectura, en la escultura, en la elaboración de instrumentos musicales, en la pintura sobre piedra, arcilla, madera, telas, etc. En todo este universo cultural aparecen formas geométricas, así como relaciones entre ellas: paralelismo, simetría, semejanza...

Mencione algunos objetos naturales o propios de nuestra cultura que representan objetos geométricos en una, dos o tres dimensiones, así como relaciones geométricas, tales como paralelismo, perpendicularidad, semejanza de figuras, simetrías, etc.

Michel Serres, en su libro "Los orígenes de la geometría" (1996), habla de los orígenes naturalistas y culturalistas de la geometría. Para referirse a los primeros, se ubica en las crecidas periódicas del río Nilo en Egipto, que inundaban las tierras de labranza, reduciendo sus dimensiones. Con el descenso de las aguas se presentaba el problema de restituir a los propietarios sus campos, en las dimensiones que tenían antes de las inundaciones. Este era un problema de formas y medidas, es decir, geométrico.

Pero, ¿cuál era el trasfondo de todo esto? El pago de los impuestos que los propietarios de las tierras debían efectuar, pago proporcional al tamaño de sus campos. Aquí entran en juego el poder, las leyes, el Derecho. Este sería el origen culturalista de la geometría.

De este modo y según Serres, la geometría no reproduce la tierra ni el cielo, sino que pone en comunicación la naturaleza y la cultura.

2. ¿Cómo son los objetos geométricos?



Pero la percepción de esas regularidades llamadas formas o relaciones geométricas, así como su manipulación y representación, no constituyen, sin más, la geometría. El filósofo Edmund Husserl, en su obra "El origen de la geometría" (Husserl, 2000), denomina como "mundo pregeométrico" este mundo de cosas corpóreas (bien sean objetos naturales o artefactos culturales), dotadas de formas espaciales que se manifiestan mediante cualidades materiales tales como el tamaño, color, peso, dureza, etc.

A partir de ellas debe comenzar un proceso de "abstracción". Por ejemplo, de un objeto plano (o que se ve plano) y de forma redonda (una rueda, una flor, la sección de un tronco cortado, la cara de la luna...) se puede pasar a la idea de línea plana "redonda". Pero el tránsito no termina aquí. Aún hay un paso más, que es llegar a la idea de circunferencia, desligada de los objetos de los que proviene: la circunferencia es un objeto "ideal", una línea formada por todos los puntos que equidistan de uno dado (el centro de la circunferencia); o bien, es la línea que mantiene una curvatura constante (para entender esto último, si se "tuerce" el volante de un carro y se le deja con ese giro fijo, el carro, al moverse, traza una circunferencia, ya que constantemente está dando "la misma curva").

De esta forma, Husserl establece que los auténticos objetos geométricos son las ***idealidades geométricas***, modelos de los objetos de los que surgen. Y que la Geometría es la disciplina que estudia estas idealidades, esos modelos ideales.

Probablemente vamos percibiendo que la ***abstracción*** es una de las características de la matemática como ciencia. El número –objeto de estudio de la aritmética, sobre la cual han versado los diez cuadernos anteriores- es producto de un proceso de abstracción. Así, el número 5 tuvo su primer sentido en una situación concreta, al contar cinco objetos, por ejemplo, cinco árboles, o cinco dedos. La "pérdida" de los denominadores (árboles, dedos) permitió extender (abstraer) la idea de "cinco" como medida común de la cantidad de elementos de todos los conjuntos que poseyeran, justamente, cinco elementos. El símbolo que utilizamos, 5, remite siempre a esa medida común: decimos que "representa" la idea, el concepto de "cinco". El símbolo, como tal, ya es una abstracción.

Algo similar ocurre con los objetos geométricos. Hay una idea, un concepto (una "idealidad", en términos de Husserl), como la de circunferencia: línea formada por todos los puntos que equidistan de uno dado (el centro de la circunferencia), o bien, línea que mantiene una curvatura constante en su recorrido. Cualquier circunferencia trazada sobre la arena, la pizarra o un papel, es una representación de esa idea; en otras palabras, esa circunferencia trazada es como la imagen sensible, visible, del "lugar" que ocuparía una circunferencia ideal, y nos remite a esa idea.

En Matemática, pues, trabajamos con las representaciones de los objetos matemáticos: 5, una circunferencia trazada... Pero esto no significa "menospreciar" a tales representaciones, como si tuvieran una categoría inferior a la de las ideas. De hecho, toda idea o concepto necesita de ellas, se descubre en ellas, no tiene sentido sin ellas. En otras palabras, las ideas sólo pueden manifestarse, comunicarse y estudiarse a través de sus representaciones.

Y tampoco significa menospreciar el mundo de la realidad, natural o cultural, en la que están los objetos, pues aquí está la fuente primigenia de esa aventura humana que conocemos como la construcción del conocimiento matemático.

Ubicados en el terreno de las idealidades geométricas, podemos ***elaborar ciencia***, en el sentido de construir nuevas idealidades, basándonos en las anteriores. Entramos en un proceso permanente de formación progresiva de idealidades geométricas.

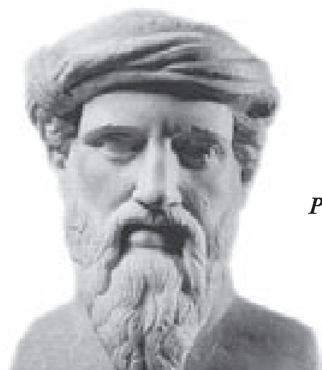
Así, por ejemplo, sobre la idea de triángulo podemos construir –sin necesidad de buscarlas entre los objetos naturales o entre los artefactos culturales- las ideas de los diversos tipos de triángulos que se pueden considerar, si se toma como criterio de diferenciación las relaciones entre las longitudes de sus lados. Podemos pensar en que los tres lados tengan la misma longitud (triángulo equilátero), que sólo dos de ellos la tengan (triángulo isósceles), o que los tres tengan longitudes diferentes (triángulo escaleno). No hay más casos posibles. Recalcamos que esta diferenciación puede hacerse a nivel mental, sin necesidad de buscar tales triángulos en objetos de la realidad.

De hecho, este proceso de abstracción e idealización no es nuevo. Para ubicar su origen en la historia, basta observar los nombres que utilizamos para designar los objetos geométricos. Algunos de ellos se derivan directamente del latín (triángulo = tres ángulos; equilátero = lados iguales...), pero las raíces primigenias se encuentran en la ***lengua griega*** (geometría = geo [tierra] + metron [medida] = medida de la tierra; polígono = polus [mucho] + gonia [ángulo] = muchos ángulos; isósceles = iso [igual] + skelos [pierna] = piernas iguales [no nos sorprendamos por esta última expresión: si una persona se yergue sobre sus piernas abiertas y si éstas son iguales, la forma que presenta el conjunto de ambas piernas con el suelo es, precisamente, la de un triángulo "piernas iguales", es decir, isósceles]; escaleno = skalenos = oblicuo...).

Los griegos son los primeros que "suben" los objetos geométricos al nivel de la idealidad, abstracción que les permite desa-

rrollar los conocimientos geométricos hasta cotas nunca alcanzadas antes, precisamente por haberse "liberado" de depender de los objetos de la realidad. Nada tiene de extraño que el libro de los Elementos, escrito por Euclides hacia el año 300 a. C. y que recoge una buena parte de estos conocimientos, se convierta en el texto más leído, hasta el siglo XX, después de la Biblia.

Así, pues, en los griegos encontramos la intención de "construir" la geometría en el sentido de ir formando progresivas idealidades geométricas, apoyándose en las anteriores por la vía de la deducción. Pero no basta con esa preocupación originaria, sentida hace más de veinte siglos. Porque a esa intención inicial hay que agregarle, ineludiblemente, la de garantizar su auténtica transmisión cultural a lo largo de los tiempos (Husserl, 2000). Es decir, tenemos que garantizar que los colectivos culturales y las personas sepan "construir" la geometría, dotar de sentido a sus objetos, propiedades y relaciones. Esto nos lleva a hablar del estudio de la geometría.



Pitágoras

3. ¿Por qué y para qué estudiar geometría?

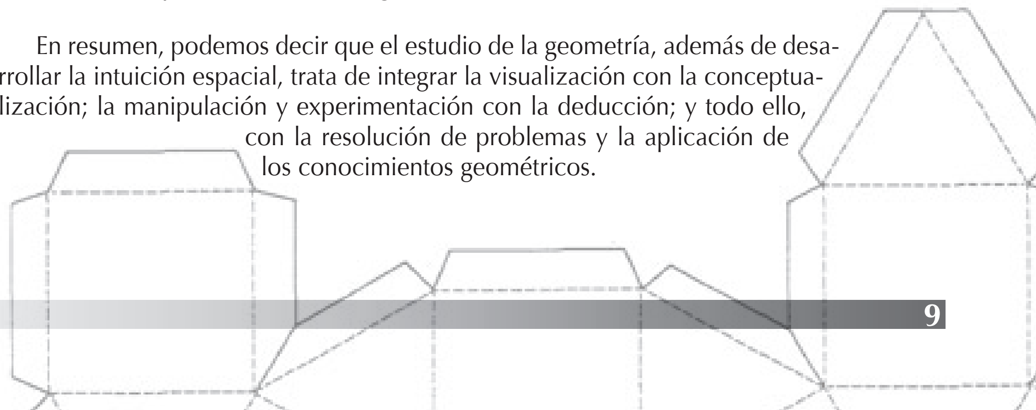
Miguel de Guzmán nos recuerda que el objetivo principal de este estudio debe ser el de ***desarrollar el pensamiento geométrico***, entendido éste como algo "básico y profundo, que es el cultivo de aquellas porciones de la matemática que provienen de y tratan de estimular la capacidad del hombre de explorar racionalmente el espacio físico en que vive, la figura, la forma básica" (Guzmán, 1988, p. 135).

Explorar racionalmente significa ir más allá de la mera visualización o manipulación. Además de ***ver***, la actividad geométrica nos tiene que llevar a ***definir, deducir, resolver problemas y aplicar*** los conocimientos sobre los objetos geométricos, sus propiedades y relaciones entre ellos (Pérez Gómez, 2002).

Ahora bien, ¿qué se consigue con esta exploración y este estudio racional de los objetos geométricos? ¿Qué ofrece de especial la geometría, dentro de la matemática? En primer lugar, sumergirse en el estudio de la geometría ayuda al desarrollo de la ***intuición espacial***, a la construcción del pensamiento espacial. Al respecto, recordemos que el hemisferio derecho de nuestro cerebro, centro de la creatividad y de la intuición, procesa la información basándose en imágenes espaciales y visuales, y se comunica a su vez por medio de acciones e imágenes. El estudio de la geometría propicia el desarrollo de estas potencialidades, muchas veces relegadas frente a las de carácter exclusivamente lógico-abstracto.

Por otro lado y como nos lo recuerda Miguel de Guzmán, la geometría es "la ***fuente*** más importante que por muchos siglos ha tenido la matemática de ***verdaderos problemas*** y resultados interesantes, abordables con un ***número pequeño de herramientas*** fácilmente asimilables" (Guzmán, 1988, p. 135). A esto hay que agregar cierto aire de juego que con frecuencia presentan las tareas geométricas.

En resumen, podemos decir que el estudio de la geometría, además de desarrollar la intuición espacial, trata de integrar la visualización con la conceptualización; la manipulación y experimentación con la deducción; y todo ello, con la resolución de problemas y la aplicación de los conocimientos geométricos.



4. El avance en el aprendizaje de la geometría

Hace algunas décadas y basados en sus investigaciones acerca del aprendizaje y de la enseñanza de la geometría, los esposos Pierre y Dina van Hiele presentaron un modelo de cómo se avanza, por etapas, en el desarrollo del razonamiento geométrico. He aquí, resumidos, los rasgos fundamentales de los niveles progresivos de tal desarrollo (van Hiele, 1986):

• Nivel 1 (***Reconocimiento***): Las personas reconocen las figuras geométricas sólo por su ***forma***, por su apariencia física, globalmente. No reconocen sus partes, ni sus propiedades. Sin embargo, pueden reproducir una copia de algunas figuras en particular.

Por ejemplo, se encuentran en este nivel los individuos que saben reconocer la forma rectangular al ver una hoja de un cuaderno, el tablero de una mesa, una ventana, etc., pero sin percatarse de las partes (lados, ángulos, diagonales...) del rectángulo, o de sus propiedades.

• Nivel 2 (***Análisis***): Ahora las personas pueden reconocer que las figuras tienen ***partes o elementos***, incluso las figuras pueden ser reconocidas por sus partes, aunque no se identifican las relaciones existentes entre ellas. Las propiedades de las figuras se establecen experimentalmente.

Siguiendo con el ejemplo anterior, en este nivel los individuos ya perciben (contando y midiendo segmentos y ángulos) que un rectángulo posee 4 lados paralelos dos a dos, 4 ángulos rectos, y dos diagonales iguales, pero no son capaces de percibir por qué esos elementos y propiedades están relacionados entre sí. Por ejemplo, no establecen un vínculo entre el hecho de que las dos diagonales sean iguales, con el hecho de que los lados opuestos sean paralelos y de que los lados contiguos sean perpendiculares.

• Nivel 3 (***Clasificación***): En este nivel, las figuras se determinan por sus ***propiedades***. Los objetos geométricos pueden ser definidos –incluso de más de una manera- a partir de las propiedades que relacionan a sus elementos. Esto permite diferenciar unos objetos de otros a partir de sus semejanzas y diferencias, es decir, clasificarlos.

Si continuamos con el ejemplo del rectángulo, ahora los individuos captan que el rectángulo es un paralelogramo (cuadrilátero o polígono de cuatro lados, que posee dos pares de lados paralelos), que se particulariza por el hecho de que sus lados forman cuatro ángulos rectos. De esta forma, definen el rectángulo como una clase de paralelogramo. Y lo distinguen, por ejemplo, del rombo, otra clase de paralelogramo cuya propiedad característica es que los cuatro lados son de igual longitud.

Saber clasificar los paralelogramos es saber precisar las características que son comunes a todos ellos (cuadriláteros o polígonos de cuatro lados, que poseen dos pares de lados paralelos) y, simultáneamente, las que son peculiares de cada tipo de paralelogramo. Por eso, por ejemplo, se descubre que el cuadrado es, simultáneamente, un rectángulo (sus lados forman cuatro ángulos rectos) y un rombo (los cuatro lados son de igual longitud). Y que, por consiguiente, el cuadrado puede definirse como “un rectángulo que tiene sus cuatro lados iguales”, o como “un rombo que tiene sus ángulos rectos”.

• Nivel 4 (***Deducción formal***): Llegados a este nivel, las personas están en capacidad de desarrollar ***demostraciones***, es decir, de formar una secuencia deductiva de argumentaciones para ir obteniendo nuevos resultados a partir de los anteriores.

En el texto del Cuaderno construiremos algunas demostraciones sencillas.

¿Por qué presentamos esta secuencia de niveles [por razones prácticas hemos omitido el quinto nivel 5 (rigor)] de desarrollo del razonamiento geométrico? Porque, en primer lugar, debemos estar conscientes de que la actividad geométrica no se reduce al primer nivel (reconocer figuras), o a los dos primeros (reconocer figuras y los elementos que las componen), sino que tenemos que

“comprender” las figuras (entender sus propiedades y cómo las figuras se determinan y definen a partir de éstas, como se indica en el nivel 3) y, además, ser capaces de razonar a partir de estas definiciones y propiedades, con el fin de llegar a nuevos conocimientos geométricos (saber construir algunas deducciones, como se apunta en el nivel 4), así como a saber aplicarlos y resolver problemas.

Es decir, de alguna manera, la presencia de estos niveles marca el camino y la meta de lo que podemos y debemos ir alcanzando en nuestro aprendizaje geométrico, no sólo en este curso, sino en nuestra formación permanente como docentes. Y, por esta misma razón, nos pueden ayudar a evaluar el progreso de nuestro aprendizaje en el campo de la geometría.

5. Nuestra propuesta para el aprendizaje de la geometría

En éste y en los cuatro Cuadernos que siguen, vamos a transitar por el campo de la geometría. Hablaremos primero de los conceptos y construcciones elementales (Cuaderno Nº 12); y luego, de los polígonos (Nº 13 y Nº 14), de la circunferencia y el círculo (Nº 15), y de los cuerpos geométricos (Nº 16).

Nuestro proceso de presentación y trabajo va a intentar seguir un recorrido de avance en los niveles propuestos por van Hiele, niveles que acaban de describirse. Habrá, pues, actividades de reconocimiento de los objetos geométricos y de sus componentes, actividades que surgirán a partir de la construcción de tales objetos. También, actividades de definición de los objetos a partir de las propiedades de sus elementos y de las relaciones entre ellos. Finalmente y en lo posible, plantearemos actividades de deducción de nuevos conocimientos geométricos a partir de los ya aprendidos.



6. Conceptos geométricos elementales: Espacio, plano, línea y punto

En nuestro derredor encontramos objetos naturales o elaborados por personas; por ejemplo, una roca, una pelota de fútbol, una casa. Si pudiéramos meterlos ajustadamente en sendas cajas, de manera que cada objeto citado tocara por dentro todas las caras de la caja en que está metida, sin deformarlas, nos daríamos cuenta de que podríamos obtener, de tales objetos, tres medidas de longitud diferentes: su largura, su anchura (profundidad) y su altura. Es decir, los objetos que ocupan un lugar en el espacio físico tienen tres dimensiones. También tiene ***tres dimensiones*** el ***espacio*** geométrico, representado por el espacio físico.

Ahora bien, si observamos, por ejemplo, una de esas cajas, percibimos que su contorno superficial exterior está formado por zonas o caras que calificamos como planas. La misma impresión recibimos cuando observamos la parte superior de una mesa, o un piso bien pulido: si están en perfecta posición horizontal, cualquier objeto que se desplace sobre una de esas zonas, en cualquier dirección, no experimenta altibajos en su recorrido, siempre se mantiene a la misma altura.

La idea presente en estos ejemplos es la de ***plano*** que, como concepto geométrico, se considera sin espesor e ilimitado en todas sus direcciones. Si tenemos algunas figuras cerradas representadas en un plano y pudiéramos meterlas ajustadamente en sendos rectángulos, de manera que cada figura tocara por dentro los cuatro lados del rectángulo en que está metida, sin sobresalir, nos daríamos cuenta de que sólo podríamos obtener, de tales figuras, dos medidas de longitud diferentes: su largura y su anchura (o altura). Es decir, todo plano tiene ***dos dimensiones***, al igual que las figuras cerradas que podamos representar en él.

Evidentemente, no hay “cosas” en nuestro entorno real que sean planos en el sentido geométrico estricto, pues todas las cosas reales tienen tres dimensiones. Pero sí podemos encontrar imágenes o representaciones de un plano: la parte superior de una mesa, un piso o una pared bien pulidos, una hoja de papel bien tensa, la superficie de una laguna en la que no se observa ningún movimiento, etc.

Por otro lado, sobre los objetos y particularmente sobre los planos, podemos trazar líneas valiéndonos de punzones, lápices, tizas, etc. Algunas de estas líneas pueden ser "derechitas", rectas; otras pueden ser "torcidas", curvadas; otras pueden presentar trazos rectos combinados con algunos curvados, etc. La idea presente en estos ejemplos es la de ***línea*** que, como concepto geométrico, se considera sin espesor. Si consideramos diversas líneas y las "enderezamos", nos daríamos cuenta de que sólo podríamos obtener una medida de ellas: su largura o longitud. Es decir, toda línea tiene ***una dimensión***.

También aquí es evidente que no hay "cosas" en nuestro entorno real que sean líneas en el sentido geométrico estricto, pues todas las cosas reales tienen, como se ha dicho, tres dimensiones. Pero sí podemos encontrar imágenes, representaciones de líneas: los bordes de los objetos (por ejemplo, si volvemos a las cajas mencionadas anteriormente, descubrimos que poseen aristas, que son las partes en que se "topan" dos caras contiguas, es decir, las líneas en que terminan y coinciden ambas caras), o los bordes de las figuras dibujadas en un plano, o un trozo extendido de hilo de coser...

Antes de abordar los diferentes tipos de líneas, debemos mencionar otro objeto geométrico básico. Es el que se obtiene como corte o intersección de dos líneas: el ***punto***. Como objeto geométrico, el punto no tiene ***dimensión alguna***. Toda línea se considera formada por puntos y, por esa razón, la línea no tiene "espesor". Como imágenes o representaciones de un punto podemos referirnos a la huella que sobre un papel puede dejarse con el toque de la punta de un lápiz, o a la perforación que puede hacerse con la punta de una aguja, o a los vértices de una caja...

En resumen, podemos establecer el siguiente cuadro que relaciona los ámbitos en los que pueden encontrarse los objetos geométricos, con el número de dimensiones correspondientes:

Ámbito de los objetos geométricos	Nº. de dimensiones
Espacio	3
Plano	2
Línea	1
Punto	0

Volvamos ahora a los diferentes tipos de línea que se pueden trazar sobre un plano. En primer lugar, la línea ***recta***. Como objeto geométrico, la línea recta es la que mantiene la ***misma dirección*** en todos sus puntos y se considera ilimitada por ambos extremos. La línea recta puede recorrerse en ***dos sentidos opuestos*** (no es correcto hablar de dos direcciones opuestas...). Se considera que una recta está formada por infinitos puntos.

También podemos hablar de la ***semirrecta***, porción de recta que tiene como origen un punto y se extiende ilimitadamente en un sentido. Como puede verse, todo punto sobre una recta determina dos semirrectas en ella. Finalmente, si fijamos dos puntos sobre una recta, tendremos un ***segmento***, porción de recta que une los dos puntos. Con segmentos situados en rectas diferentes, y concatenados por sus extremos, se construyen ***líneas quebradas o poligonales***. Cuando estas líneas quebradas se "cierran" sin haberse cruzado entre ellas, se forman polígonos.

También podemos hablar de líneas ***curvas*** (y de segmentos curvos), que son aquellas que van variando su dirección en cada punto. Entre algunas de las más conocidas podemos mencionar la circunferencia (el borde de una figura plana redonda) o la catenaria, que es la línea formada por una cadena (eliminando su espesor) cuando cuelga libremente de sus dos extremos. Como se ve, también las líneas curvas pueden ser "cerradas" o pueden dejar libres sus extremos. Finalmente, hablamos de líneas ***mixtas*** para referirnos a las que "mezclan" unas partes rectas con otras curvas.

Antes de seguir adelante tengamos presente que:

• Dos puntos bastan para determinar una recta

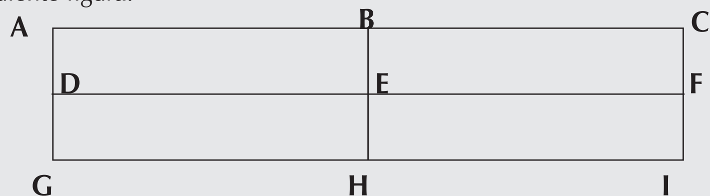
• Tres puntos no alineados bastan para determinar un plano

• Un plano queda perfectamente determinado mediante dos rectas que se cortan en un punto

Todos estos objetos geométricos básicos tienen su representación:

Objeto geométrico	Representación
Punto	Con una letra mayúscula **A.**
Recta	Con sendas puntas de flecha en los extremos. Se marcan dos puntos sobre la recta; o con una letra minúscula **A** **r** **B**
Semirrecta	Con una punta de flecha en el extremo "abierto" Se marca el punto origen y otro punto; o con una letra minúscula **M** **s** **N**
Segmento	Se marcan los dos puntos extremos **P** **Q**

1. Indique, señalando sus puntos extremos, cuántos segmentos aparecen dibujados en la siguiente figura:



He aquí algunas preguntas que ya podemos responder. Trate de visualizar cada situación antes de dar una respuesta.

a) ¿Cuántos puntos tiene una recta? ¿Y una semirrecta?

b) ¿Cuántos puntos tiene un segmento? ¿Depende de su tamaño?

c) ¿Cuántas rectas pueden pasar por un punto de un plano?

d) ¿Qué pasa si dos rectas tienen tres puntos en común?

e) ¿Cuántas rectas diferentes se pueden determinar con tres puntos no alineados de un plano, es decir, si no hay ninguna recta que contiene a los tres puntos?

f) ¿Y si se trata de cuatro puntos con las mismas condiciones, es decir, que no hay ninguna terna de puntos contenidos en una misma recta?

g) ¿Y si ahora se trata de cinco puntos con las mismas condiciones?

h) ¿En cuántos semiespacios divide un plano al espacio?

i) ¿En cuántos semiplanos divide una recta al plano que la contiene?

j) Si marcamos dos puntos en una recta, ¿cuántas semirrectas diferentes quedan determinadas? ¿Y si marcamos tres puntos diferentes?

k) ¿Cuántas rectas contiene un plano?

l) ¿Cuántos puntos contiene un plano?

m) ¿Cuántos planos contiene el espacio?

n) Si estamos en el espacio, ¿cuántos planos pueden contener a una misma recta?

ñ) Y si tres rectas pasan por un mismo punto, ¿se determina un solo plano que contiene al punto y a las tres rectas?

o) Si marcamos dos puntos en una recta, ¿cuántos segmentos diferentes quedan determinados? ¿Y si marcamos tres puntos diferentes? ¿Y si son cuatro?

Veamos las respuestas:

a) Infinitos puntos en ambos casos

b) Tiene infinitos puntos, cualquiera que sea su tamaño

c) Infinitas rectas. Conforman los que se llama un "haz de rectas"

d) Que en realidad no se trata de dos rectas, sino de una sola recta; ambas coinciden no sólo en esos tres puntos, sino en todos sus puntos

e) Tres rectas

f) Seis rectas

g) Diez rectas

h) En dos semiespacios

i) En dos semiplanos

j) Cuatro: de cada punto salen dos, una en cada sentido. Seis, por la misma razón

k) Infinitas rectas

l) Infinitos puntos

m) Infinitos planos

n) Infinitos planos. Puede ayudarnos la imagen de un libro suspendido en el aire al agarrarlo por una de sus hojas: el libro se abre y todas las hojas (imagen de los planos) coinciden en el canto del libro (imagen de la recta común). Se habla entonces de un "haz de planos".

ñ) En general, no. Pensemos en una habitación, en el punto en que se unen el piso y dos paredes contiguas. Las tres "rectas" que se forman entre esos tres planos (hay que imaginarlas ilimitadas...) pasan por el mismo punto y, sin embargo, se necesita más de un plano para contener el punto y las tres rectas.

o) Un solo segmento. Tres segmentos. Seis segmentos.

7. Construir y medir objetos geométricos: herramientas

Indudablemente, podemos imaginarnos los objetos geométricos. Pero también podemos "construirlos" o representarlos con el fin, por ejemplo, de estudiarlos mejor. En particular, podemos *representar en un plano* los objetos y figuras de hasta dos dimensiones (y de alguna manera los de tres dimensiones, dibujándolos como si fueran "transparentes"...). Y una vez dibujados, también podemos medir sus elementos o componentes: longitud (de segmentos), amplitud (de ángulos), superficie (de figuras planas cerradas).

Para facilitarnos esta tarea de representar y medir contamos con ciertas herramientas que hemos de aprender a manejar adecuadamente. He aquí las fundamentales:

Herramientas geométricas	Funciones básicas
Regla y escuadra	Trazar segmentos Medir la longitud de segmentos (aproximadamente)
Compás	Conservar distancias Al girar sobre un extremo fijo, trazar arcos de circunferencias
Transportador o arco graduado	Construir ángulos Medir la amplitud de un ángulo (aproximadamente)

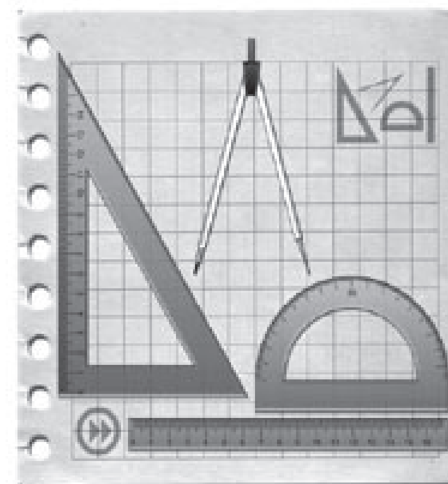


Fig. 1: Herramientas geométricas

8. Actividades referidas a segmentos

8.1. Construir el segmento que une dos puntos dados

Se coloca la regla de forma que su borde "toque" simultáneamente a los dos puntos y se traza la porción de línea recta correspondiente.

8.2. Medir la distancia existente entre dos puntos P y Q, o la longitud del segmento PQ: Se coloca la regla de forma que su borde toque simultáneamente a los dos puntos, o que coincida con el segmento ya dado. Se coloca el 0 de la regla en uno de los puntos o en uno de los extremos del segmento, y se lee (con la mayor precisión posible) el número correspondiente al otro punto o al otro extremo del segmento. Si

no se parte del 0 de la regla, hay que restar del número leído al final, el número inicial. Observe que la distancia entre los puntos P y Q es la misma que entre los puntos Q y P; y que la longitud del segmento PQ es la misma que la del segmento QP.

8.3. Construir un segmento de longitud dada, a partir de un punto P sobre una recta dada y en el sentido que se indique

Determinar sobre los números de la regla (preferiblemente desde el 0), la longitud dada. Si es posible, abarcarla con el compás. Colocar sobre el punto P el extremo puntiagudo del compás y, con el otro extremo orientado hacia el sentido deseado, marcar el punto Q sobre la recta: PQ es el segmento solicitado. Si la longitud dada no se abarca con el compás, se procede con la misma regla.

La actividad anterior también se puede entender como ***trasladar un segmento***, es decir, colocarlo sobre una recta dada (puede ser la misma en que se halla el segmento original), a partir de un punto y en el sentido que se indique.

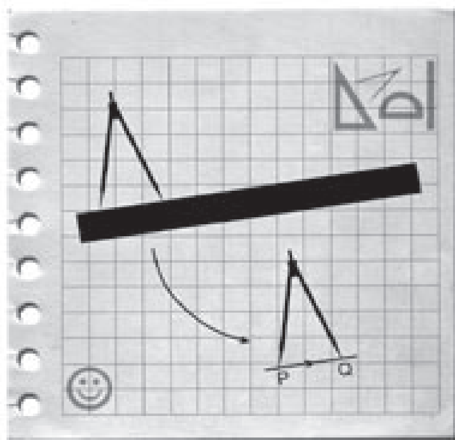


Fig. 2: Construir un segmento de longitud dada

8.4. Verificar la relación existente entre las longitudes de dos segmentos

Dado uno de los dos segmentos, se traslada el otro sobre la recta en que se halla el primero, de modo que se superpongan y coincidan sendos extremos. La observación de los extremos libres determina si los segmentos son iguales o cuál de ellos es mayor o menor.

La anterior es una forma de realizar la actividad sin recurrir a las medidas de los segmentos. Lógicamente, también se pueden medir ambas longitudes y comparar las cantidades correspondientes. De esta manera se puede tener una cuantificación de la comparación de la longitud de ambos segmentos.

8.5. Dibujar puntos equidistantes (a una distancia dada) sobre un segmento, a partir de un punto dado P

Marcada la distancia sobre la regla, abarcarla con el compás. Ubicarse en el punto P y, en el sentido deseado, marcar el punto siguiente Q. Luego, sobre Q, repetir la acción. Y así progresivamente con los nuevos puntos el número de veces que se requiera. Si no se puede abarcar la longitud dada con el compás, se procede de manera análoga con la misma regla.

8.6. Construir un segmento que sea la suma de otros dados

Se traza una recta y sobre ella se determina un punto P. Se traslada, a partir de P, el primero de los segmentos dados. A partir del punto extremo Q del primer segmento, se traslada el segundo segmento. Y así, progresivamente, hasta trasladar todos los segmentos. El segmento que va desde P hasta el extremo libre del último segmento trasladado es el segmento suma de los segmentos dados. Observe que el orden en que se trasladan los segmentos no afecta al resultado final.

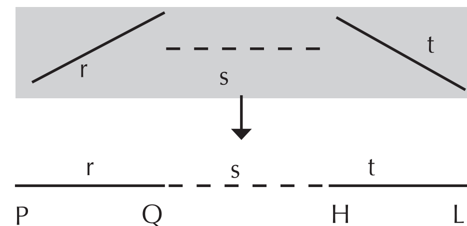


Fig. 3: Segmento suma de otros dados

8.7. Construir un segmento que sea la diferencia de dos segmentos dados

Con ayuda del compás se traslada uno de los segmentos sobre el otro, de modo que se superpongan y coincidan sendos extremos. Con el compás se abarca el segmento constituido ahora por los dos extremos no coincidentes de ambos segmentos. Este nuevo segmento puede trasladarse al lugar que se desee. (ver figura 4)

8.8. Verificar si un segmento es la suma (o la diferencia) de otros segmentos dados

Para determinar si un segmento AB es la suma de varios segmentos dados, primero se construye el segmento suma CD de estos últimos (actividad 8.6.) y luego se verifica la relación existente entre los segmentos AB y CD (actividad 8.4.).

Análogamente, para determinar si un segmento AB es la diferencia de dos segmentos dados, primero se construye el segmento diferencia CD (actividad 8.7.) y luego se verifica la relación existente entre los segmentos AB y CD (actividad 8.4.). También puede construirse el segmento suma de AB y el menor de los dos segmentos dados y verificar si el nuevo segmento es igual al mayor de los dos dados.

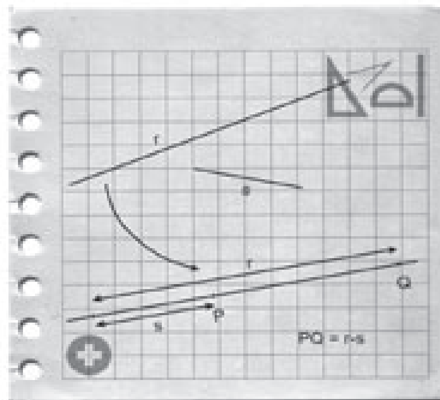


Fig. 4: Segmento diferencia de dos segmentos dados

9. Actividades referidas a ángulos

He aquí un par de situaciones muy frecuentes en nuestra vida diaria: una puerta que se abre y un reloj de agujas funcionando. Vamos a destacar en ambas una figura matemática muy interesante.

En la primera de ellas vemos que la puerta se va separando de la pared en que se encuentra, de una manera particular. Desde el punto de vista matemático, podemos pensar en el plano de la hoja de la puerta que se separa del plano de la pared, mientras ambos planos comparten el eje donde se hallan las bisagras. La figura idealizada que aparece es la de dos porciones de planos que comparten o se cortan en un segmento; o en términos más generales, dos planos que comparten o se cortan en una recta. El objeto matemático formado por todos esos elementos se denomina ***ángulo sólido*** (a pesar de que más bien se presenta como "vacío", como "hueco"...) o ***ángulo en el espacio.***

Si ahora observamos las dos agujas de un reloj, vemos que también ellas se acercan o alejan una de la otra. Desde el punto de vista matemático, podemos pensar en el segmento de una de las agujas que se mueve con respecto al segmento de la otra aguja, mientras ambos comparten su extremo en el centro del reloj. La figura idealizada que aparece es la de dos segmentos que comparten uno de sus extremos; o en términos más generales, dos semirrectas que parten del mismo punto. El objeto matemático formado por todos esos elementos se denomina ***ángulo plano***. Otra situación en la que aparece un ángulo plano es la que forman, sobre el plano del piso, la línea inferior de la puerta que se abre y la de la pared en que se halla la puerta. O cuando abrimos las dos patas de un compás, en el plano formado por ellas.

Vamos a detenernos ahora en el estudio de los ***ángulos planos*** (de los ángulos sólidos hablaremos en el Cuaderno n° 16).

Hay varias formas de considerar un ***ángulo*** (Vasco, 1999). Desde una ***perspectiva dinámica***, podemos entenderlo como un ***giro que hace una semirrecta que mantiene fijo su punto de origen***. Como este movimiento puede ser más o menos amplio, hablamos de ***amplitud del giro***. Incluso, esta amplitud puede ser mayor que una vuelta completa.

En este caso interesa saber en qué "sentido" se mueve la semirrecta; es decir, la ***orientación del giro***. Si tomamos como referencia un reloj, suele decirse que un giro en el sentido de las agujas de un reloj se considera como negativo, mientras que un giro en el sentido contrario al de las agujas de un reloj se considera como positivo. ¿La razón de esta asignación? Pues sencillamente, que se supone la semirrecta "durmiendo" en una recta horizontal y extendiéndose hacia la derecha de su punto de origen (como la aguja horaria de un reloj a las 3 en punto); así, su movimiento natural cuando se despierta y se "levanta" sin mover su punto de origen, es hacia arriba, justo en sentido contrario al de las agujas de un reloj...

Todavía desde una perspectiva dinámica, puede considerarse un ángulo como un movimiento de ***barrido que hace una semirrecta que mantiene fijo su punto origen***. Es una idea muy similar a la de giro, sólo que ahora la semirrecta, al moverse, va marcando su huella en el plano. Las ideas



de amplitud y de orientación del barrido se mantienen.

Desde una ***perspectiva estática***, un ángulo puede ser considerado como la ***región del plano limitada por dos semirrectas con un origen común***. Es decir, como si fuera el resultado del barrido del que se hablaba antes. También desde la misma perspectiva, un ángulo puede ser considerado como la ***unión de dos semirrectas con un origen común***. En ambos casos se mantiene el concepto de amplitud angular, pero no suele tomarse en cuenta la orientación del giro, a no ser que se diga explícitamente cuál de las dos semirrectas se considera como "primera" con respecto a la otra.

Al hablar de ángulos, conviene advertir que todo lo que se ha dicho en términos de semirrectas puede extenderse también a segmentos. Para incluir ambos casos posibles, se habla de los ***lados de un ángulo***. Por su parte, el punto de origen de la semirrecta que gira, o el punto común de las dos semirrectas que se unen, se denomina ***vértice*** del ángulo.

Nótese, además, que cuando se trazan dos semirrectas con un origen común, se determinan dos regiones en el plano. La que corresponde al giro dado, se denomina ***región interna del ángulo***, y a veces se marca con un pequeño arco de lado a lado:). La otra región se denomina externa.

Los ángulos se representan con tres letras seguidas, precedidas de un pequeño símbolo "<"; las letras representan, en este orden, un punto de un lado, el vértice, y un punto del segundo lado; por ejemplo, el ángulo <POQ. También suelen representarse con alguna letra del alfabeto griego; por ejemplo, < α. O, incluso, con cualquier otra letra o dígito.

En resumen, las ideas básicas para definir un ángulo son variadas: un giro, un barrido, una región del plano, la unión de dos semirrectas... Nos encontramos, pues, con la diversidad en la "definición" de lo que es un ángulo. Claro que todas estas definiciones están relacionadas unas con otras, pero cada una de ellas hace énfasis en un aspecto particular.

Y este énfasis puede tener su repercusión a la hora de entender qué significa medir un ángulo. Porque podemos caer en el error de pensar en medir la longitud de sus lados, o el área de la región interna, como lo pueden sugerir las visiones estáticas del ángulo. Pero no es así: ***Medir un ángulo significa medir su amplitud***; es decir, desde una perspectiva dinámica, la amplitud del giro dado.

Por consiguiente, afirmar que un ángulo es mayor que otro, no significa que los lados del primero son más largos que los del segundo, o que la región interna del primero es aparentemente mayor que la del segundo, sino que su amplitud es mayor.

Ahora bien, medir significa comparar con una unidad de la misma especie, lo que nos obliga a determinar cuál es la ***unidad de medida de los ángulos***. Hay varias. Puede ser:

una vuelta completa,
un cuadrante (la cuarta parte de una vuelta),
un sextante (la sexta parte de una vuelta),
un octante (la mitad de un cuadrante),
un grado sexagesimal (la amplitud de un ángulo obtenido como resultado de dividir una vuelta en 360 partes iguales),
un grado centesimal (la amplitud de un ángulo obtenido como resultado de dividir una vuelta en 400 partes iguales).

Hay otras unidades, como el radián, cuya explicación omitimos por ahora. Habitualmente, se utiliza el grado sexagesimal, herencia de la cultura babilónica. La medida de un ángulo se indica con el número de grados (se entiende que son sexagesimales, si no se indica otra cosa), acompañados del símbolo º; por ejemplo, 90º. Cada grado se divide en 60 minutos (60') y cada minuto en 60 segundos (60").

2. ¿Cuántos grados sexagesimales tiene un giro de una vuelta completa?
3. ¿Cuántos grados tiene un ***ángulo llano***, es decir, el ángulo formado por un giro de una media vuelta?
4. ¿Cuántos grados tiene un ***ángulo recto***, es decir, el ángulo formado por un giro

de un cuadrante?

5. ¿Cuántos grados tiene el ángulo formado por un giro de un octante?

6. Un ***ángulo agudo*** es aquel cuya medida es menor que la de un ángulo recto. ¿Entre qué valores se halla la medida de un ángulo agudo?

7. Un ***ángulo obtuso*** es aquel cuya medida es mayor que la de un ángulo recto. ¿Cuántos grados tiene un ángulo obtuso?

8. ¿Qué efecto produce un giro de 450°?

9. ¿Y un giro de 1.000°?

¿Por qué esos nombres dados a los ángulos? Podemos "ver" lo de ángulo llano y recto. Para justificar lo de "agudo" y "obtuso", pensemos en una punta de flecha. Si el perfil de la punta presenta un ángulo menor de 90°, puede ser considerada una buena punta, "aguda", apta para penetrar en el blanco. Pero si es mayor de 90°, es una punta prácticamente ineficiente, que no penetra en el blanco por ser poco aguda, demasiado aplastada, chata, roma, "obtusa"...

Entre los ángulos también se establecen ciertas relaciones en función de sus medidas. Por ejemplo, de dos ángulos que tienen igual medida se dice que son ***congruentes***. Por otro lado, dos ángulos se llaman ***complementarios*** cuando la suma de sus medidas es 90°; por ejemplo, dos ángulos de 30° y 60°, respectivamente; o los ángulos de 24° 15′ 36″ y 65° 44′ 24″ (verifíquelo). Y se llaman ***suplementarios*** cuando la suma de sus medidas es 180°; por ejemplo, dos ángulos de 30° y 150°, respectivamente; o dos ángulos de 139° 49′ 53″ y 40° 10′ 07″.

10. ¿Qué ángulo se obtiene al unir los ángulos complementario y suplementario de un ángulo de 45°?

11. ¿Qué ángulo se obtiene al restar los ángulos suplementario y complementario de cualquier ángulo agudo?

12. Dado un ángulo de 30°, ¿cuánto mide el ángulo suplementario de su complementario? ¿Y si el ángulo mide 45°? ¿Y si mide 80°?

13. A partir de los resultados del ejercicio anterior, ¿qué relación existe entre el ángulo inicial y el que se obtiene al final, en los tres casos? ¿Se puede generalizar este resultado a cualquier ángulo agudo?

14. Si un ángulo α y un ángulo β son congruentes, cada uno, con un ángulo δ, ¿qué relación existe entre los ángulos α y β?

15. ¿Qué relación existe entre dos ángulos que tienen el mismo suplemento (mismo ángulo suplementario)? ¿Y si tienen el mismo complemento?

16. ¿Qué relación existe entre un ángulo obtuso y uno agudo, si el suplemento del primero es igual al complemento del segundo?

Vamos ahora con algunas actividades referidas a la construcción y medida de ángulos.

9.1. Medir un ángulo

Para medir la amplitud de un ángulo utilizamos el ***transportador.*** Los hay de diversos tipos, pero los elementos claves del transportador son:

- el segmento o trazo recto, cuyo punto medio debe estar claramente marcado
- el arco (semicircunferencia) graduado desde 0° hasta 180°; o desde 0 a 360° si el transportador abarca la circunferencia completa

Para medir un ángulo menor que un ángulo llano con el transportador graduado de 0 a 180°, lo colocamos sobre el ángulo, de manera que:

- el trazo recto del aparato coincida con un lado del ángulo, y el punto medio de ese trazo recto coincida con el vértice del ángulo
- el otro lado del ángulo quede hacia la parte del transportador que tiene el arco graduado

Aplicado el transportador de la manera indicada, se observa sobre el arco graduado el número que corresponde al punto en que el otro lado (o su prolongación, si el lado resulta pequeño para el modelo de transportador) corta al arco. A partir de ese número hay que deducir la medida del ángulo (no siempre el número leído da la medida, ya que a veces los aparatos tienen su forma particular de llevar la secuencia de los grados...).

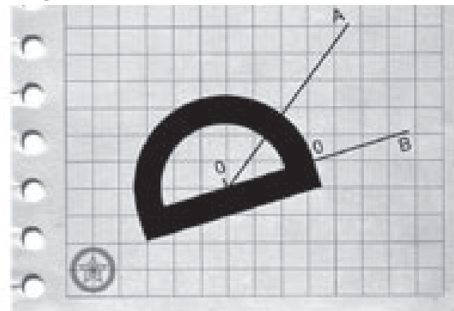


Fig. 5: Medida de un ángulo menor que un ángulo llano

Si el ángulo a medir es mayor que un ángulo llano, puede medirse la amplitud de la región externa de ese ángulo (que será menor que 180), y luego restar de 360º el resultado de la medida anterior (¿por qué?). Si el transportador abarca la circunferencia completa, el proceso es similar y aplicable a cualquier tipo de ángulo.

9.2. Construir un ángulo de medida dada

Sobre una recta se marca un punto A, que será el vértice del ángulo. Se aplica el transportador de manera que el trazo recto del aparato coincida con esa recta, y el punto medio de ese trazo coincida con A. Si la medida dada es menor que 180º y el transportador tiene un arco graduado hasta 180º, se marca un punto B en la parte exterior del arco graduado, de tal forma que la medida desde el origen coincida con la medida dada. Después se traza el otro lado del ángulo, haciéndolo pasar por A y B.

Si la medida dada es mayor que 180º y el transportador tiene un arco graduado hasta 180º, se dibuja un ángulo llano con su vértice y, sobre el ángulo, se construye un ángulo de medida igual a la diferencia de la medida dada menos 180º, y se procede como antes. Después se marca con un arco la región interna del ángulo pedido, para evitar confusiones.

9.3. Construir un ángulo recto

Es un caso particular del anterior, para una medida de 90º.

9.4. Trasladar un ángulo, corriendo el vértice sobre uno de sus lados

Se mide el ángulo dado. Se ubica el nuevo vértice en un punto A sobre la recta que contiene a uno de los lados. Con la ayuda del transportador se construye un nuevo ángulo de la misma medida.

Pero también es posible efectuar la actividad sólo con el compás. Para ello, haciendo centro con el compás en el vértice O del ángulo original, se traza un arco de lado a lado; llamemos M y N a los dos puntos extremos de ese arco. Con la misma abertura del compás, haciendo ahora centro en A, se traza un arco abierto, de mayor amplitud que el anterior y que parta desde la recta; llamemos R a este punto de la recta del cual arranca el arco (OM = AR). Volviendo al ángulo original, se toma con el compás la distancia MN. Y manteniendo la misma abertura, se hace centro en el punto R y se corta el arco abierto trazado anteriormente, lo que determinará un punto S. Al unir A con S se tiene el segundo lado del nuevo ángulo.

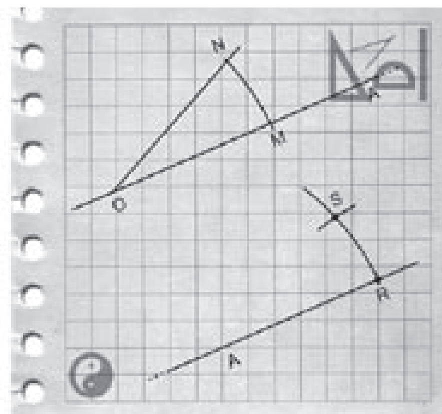


Fig.6: Traslación de un ángulo sobre la misma recta

9.5. Girar un ángulo en torno a su vértice

Para ello se necesita saber cuál es la amplitud del giro que se quiere aplicar a todo el ángulo. Si designamos con *g* a esta amplitud, hay que construir un ángulo de amplitud *g* sobre cada uno de los dos lados del ángulo original (y con la misma orientación). Los dos nuevos lados constituyen el nuevo ángulo girado, congruente con el inicial.

En la figura 7 se presenta el giro de 90º, en sentido positivo, del < QOP. Obsérvese que el lado OP gira 90º hasta OR (medida < POR = 90º) y que el lado OQ gira 90º hasta OS (medida < QOS = 90º). Después del giro de 90º en torno a su vértice O obtenemos el <SOR, congruente con el < QOP inicial.

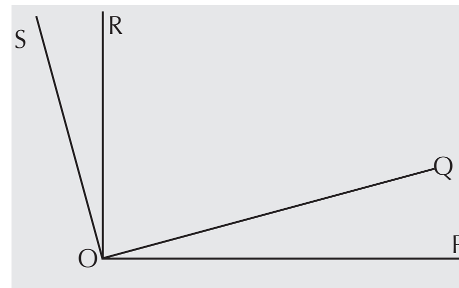


Fig. 7: Giro de un ángulo en torno a su vértice

9.6. Trasladar un ángulo a otra región del plano

Si se da el nuevo vértice y una de las semirrectas, el problema consiste en construir aquí un ángulo de la misma medida. Pueden servir de orientación los procedimientos señalados en 9.4. (uso del transportador o del compás).

9.7. Verificar la relación existente entre las medidas de dos ángulos

Se puede trasladar uno de los ángulos "sobre" el otro, es decir, de tal forma que coincidan los vértices, uno de los lados, y la orientación de ambos ángulos. La observación determina si son iguales o cuál de ellos es mayor o menor. Lógicamente, también se pueden medir ambos ángulos y comparar las cantidades correspondientes. De esta manera se puede tener una cuantificación de la comparación de la amplitud de ambos ángulos. En la figura 8 se observa que el < POQ es mayor que el < MHL.

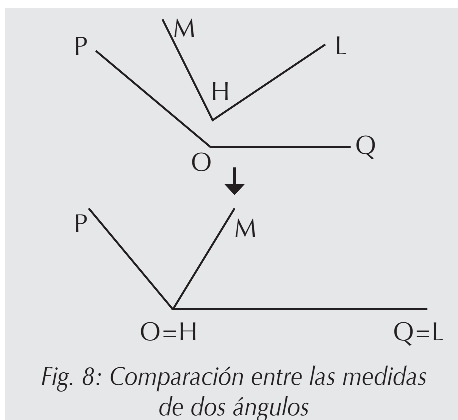


Fig. 8: Comparación entre las medidas de dos ángulos

9.8. Construir un ángulo que sea la unión de varios ángulos dados

Sean, por ejemplo, los ángulos α, β, δ. En el lugar que se indique, se construye el ángulo α. Sobre uno de sus lados y compartiendo el vértice y ese lado, se traslada el ángulo β hacia la región externa de α. Y ahora, sobre el lado que el ángulo β no compartió con α, pero haciendo coincidir el vértice, se traslada el ángulo δ hacia la región externa de β, con la misma orientación con la que β se anexó a α. El ángulo "total", formado por las dos semirrectas más externas, es el ángulo pedido. Observe que el orden en que vaya "agregando" los ángulos no afecta al resultado final.

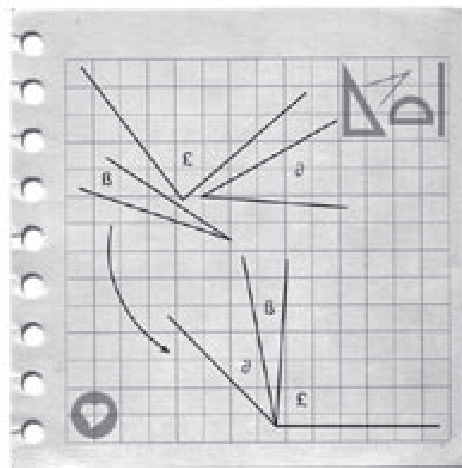


Fig. 9: Construcción de un ángulo unión de varios ángulos

9.9. Construir un ángulo que sea la diferencia de dos ángulos dados

Sean, por ejemplo, los ángulos α, β. Supongamos que α es mayor que β. En el lugar que se indique, se construye el ángulo α. Sobre uno de sus lados y compartiendo el vértice y ese lado, se traslada el ángulo β hacia la región interna de α. El ángulo que "quede" entre las dos semirrectas no coincidentes de los dos ángulos, es el ángulo pedido. Por ejemplo, en la figura 8, el < POM es la diferencia de los ángulos < POQ y < MHL.

9.10. Verificar si un ángulo es la unión (o la diferencia) de dos ángulos

Se construye el ángulo unión (o diferencia) de los dos ángulos (actividades 9.8. ó 9.9.). Y se verifica la relación entre el ángulo dado y el que se acaba de construir (actividad 9.7.).

9.11. Estimar la medida de un ángulo

Para esto no se necesitan herramientas, pero sí una vista "educada"... Resulta muy práctico acostumbrarse a las medidas de ciertos ángulos (30º, 45º, 60º, 90º, 120º, 135º, 150º...) con el fin de tenerlas como referentes a la hora de estimar cuánto puede medir un ángulo en particular (dibujado o de la vida real), o a la hora de dibujar un ángulo de medida dada.

10. Actividades referidas a rectas y segmentos perpendiculares

Dos rectas o dos segmentos son perpendiculares (del latín: per [prefijo intensivo] + pendere [colgar]) cuando ***al intersectarse forman un ángulo recto*** (en realidad, las rectas forman entonces cuatro ángulos rectos...). La perpendicularidad es una relación perceptible con mucha frecuencia en la naturaleza y en muchísimos artefactos elaborados por los hombres. Es muy importante no sólo detectar si dos segmentos son perpendiculares (basta verificar si el ángulo que forman es recto), sino también saber construir un segmento (una recta) que sea perpendicular a otro(a) dado(a).



En este contexto hay una situación muy peculiar: construir una perpendicular a un segmento, justamente en el punto medio de éste. ***La recta perpendicular a un segmento en su punto medio se denomina mediatriz del segmento.***

10.1. Construir la mediatriz de un segmento

Dado un segmento AB, tomamos un compás y lo abrimos con una amplitud que sea algo mayor que la mitad del segmento. Haciendo centro en A, trazamos un arco con esa abertura, por "encima" y por "debajo" del segmento. Repetimos la acción haciendo centro en B. Los dos arcos por encima del segmento se cortan en un punto M e, igualmente, los dos arcos por debajo del segmento lo hacen en un punto N. Al trazar la recta que pasa por M y N, hemos construido la mediatriz del segmento AB.

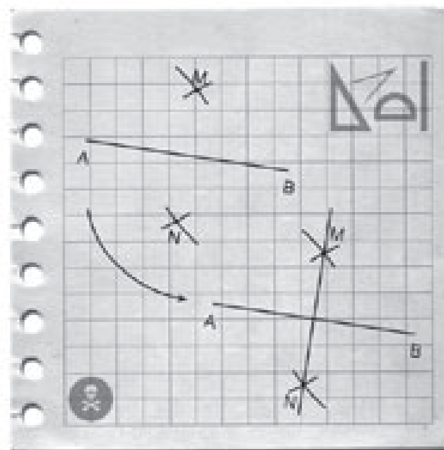


Fig. 10: Mediatriz del segmento AB

17. ¿Cómo se construye la mediatriz de una recta, o la de una semirrecta?

10.2. Hallar el punto medio de un segmento

El punto medio de un segmento forma parte también de la mediatriz del mismo. Por consiguiente, para hallarlo se sigue el mismo procedimiento que para construir la mediatriz. Sólo que, en lugar de trazar la recta MN, basta con marcar el punto P en que esta recta corta al segmento AB.

10.3. Descubrir la relación existente entre los puntos de la mediatriz de un segmento y los puntos extremos de éste

Partiendo de la construcción de la actividad 10.1., el punto *M* es un punto de la mediatriz. Como hemos visto, se obtiene al cortarse los dos arcos trazados desde los extremos A y B del segmento. Es muy importante observar que todos los puntos de un arco están a la misma distancia del punto desde el cual se traza el arco (el centro del arco). Ahora bien, como ambos arcos se han trazado con la misma abertura del compás, el punto *M* está a la misma distancia de A y de B. Por consiguiente, ***todos los puntos de la mediatriz de un segmento equidistan de los extremos del segmento***. En la figura 11, ML es la mediatriz de AB. Por consiguiente, MA = MB y LA = LB. Pero no necesariamente MA = LA.

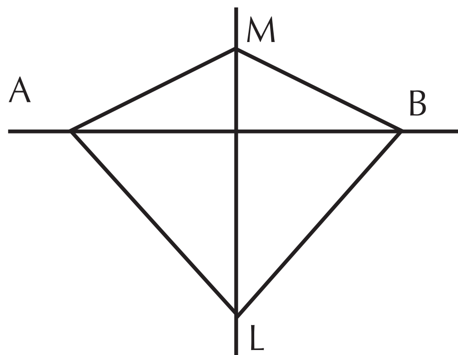


Fig. 11: Los puntos de la mediatriz de un segmento equidistan de sus extremos

Esta relación es tan importante que puede definirse la mediatriz de un segmento como la ***recta cuyos puntos equidistan de los extremos del segmento***. Más todavía, si dos puntos de una recta equidistan de los extremos de un segmento (las distancias desde un punto no tienen por qué ser iguales a las distancias desde el otro), esa recta es la mediatriz del segmento.

10.4. Verificar si un punto pertenece a la mediatriz de un segmento

No hay por qué construir la mediatriz: bastará con verificar si la distancia del pun-

to a los extremos del segmento es la misma. Esto puede hacerse con la regla o con el compás.

10.5. Construir la perpendicular a una recta desde un punto exterior a la misma

Sea P un punto exterior a una recta *m*. Con el compás hacemos centro en P y trazamos un arco que corte a la recta *m* en dos puntos, A y B. Por pertenecer al mismo arco, A y B equidistan de P; por consiguiente, P pertenece a la mediatriz del segmento que acabamos de construir, AB. Ahora bien, si sólo conocemos un punto de la mediatriz, no podemos trazar ésta. Esto nos obliga a hallar el punto medio M del segmento AB (actividad 10.2.). Esta mediatriz es la perpendicular a la recta *m* desde el punto P. El punto M de encuentro de la perpendicular y la recta original se denomina ***pie de la perpendicular.***

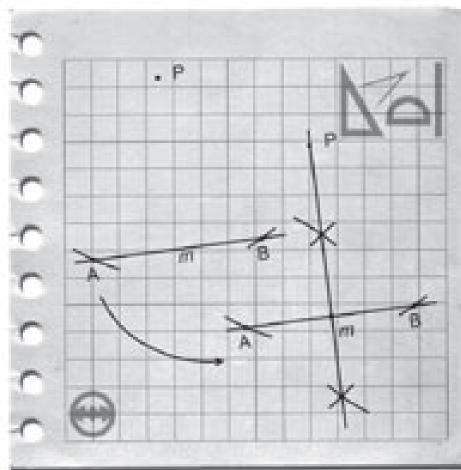


Fig. 12: Perpendicular a una recta desde un punto exterior a la misma

10.6. Construir la perpendicular a una recta que pase por un punto de la misma

Ahora, sea P un punto de una recta *m*. Con el compás hacemos centro en P y trazamos un arco que corte a la recta *m* en dos puntos, A y B, a cada lado de P. Ahora construimos la mediatriz de este segmento AB.

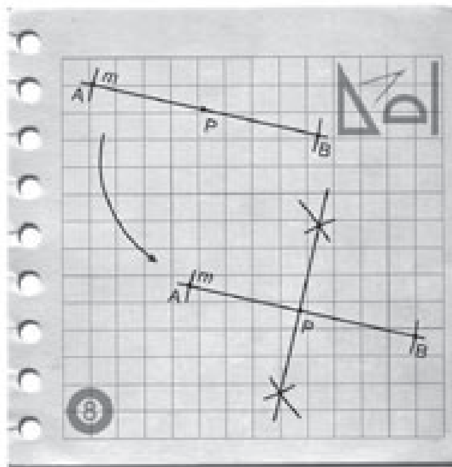


Fig. 13: Perpendicular a una recta desde un punto de la misma

10.7. Calcular la distancia entre un punto y una recta

Evidentemente, suponemos que el punto P es exterior a la recta *m* (si el punto está sobre la misma recta, la distancia es 0). La distancia de P a la recta no es sino la longitud de un segmento que vaya desde P hasta otro punto de la recta. En seguida percibimos que hay infinidad de segmentos que se pueden trazar desde P hasta la recta. La clave está, pues, en decidir cuál de estos segmentos sirve para determinar la distancia del punto a la recta.

Pues bien, esta distancia viene dada por la ***longitud del segmento que parte de P y es perpendicular a la recta m***. Ahora se ve claro el camino para hallar la distancia solicitada: se traza la perpendicular desde P (actividad 10.5.) y se mide el segmento correspondiente hasta el pie de esa perpendicular.

11. Actividades referidas a rectas y segmentos paralelos

Dos rectas o dos segmentos se consideran paralelos (para [al lado] + allelon = [unos de otros]) cuando ***señalan o mantienen la misma dirección***. Otra forma de caracterizar a dos ***rectas paralelas*** es afirmar que nunca se encuentran, que nunca se cortan en un punto (en el caso de segmentos, serán paralelos si las rectas sobre las que descansan son paralelas). Dos rectas que se cortan se denominan ***secantes***; por ejemplo, dos rectas perpendiculares son secantes.

Jaimito piensa que dos rectas paralelas, por muy separadas que estén, siempre se encuentran en un punto si éste es suficientemente "gordo". En la geometría de Jaimito, este resultado se conoce como "teorema del punto gordo"...

El paralelismo es otra relación también perceptible con frecuencia en la naturaleza y en muchísimos artefactos elaborados por los hombres. Es muy importante no sólo

detectar si dos rectas son paralelas, sino también saber construir una recta que sea paralela a otra dada.

11.1. Determinar si dos rectas son paralelas

Se toman dos puntos de una de las rectas y se mide la distancia desde cada uno de ellos hasta la otra recta (actividad 10.7.). Si la distancia es la misma, las rectas son paralelas.

11.2. Construir rectas paralelas a una dada

Dada una recta *m*, se marcan dos puntos, A y B. Se trazan sendas rectas perpendiculares a *m* por A y B (actividad 10.6.). Se abre el compás con la amplitud correspondiente a la distancia a la que se desea construir la recta paralela. Sobre las dos rectas perpendiculares y haciendo centro, respectivamente, en A y en B, se marcan sendos puntos M y N, respectivamente, en el mismo semiplano y a la distancia determinada por la abertura del compás. La recta que pasa por M y N es la paralela a *m* solicitada.

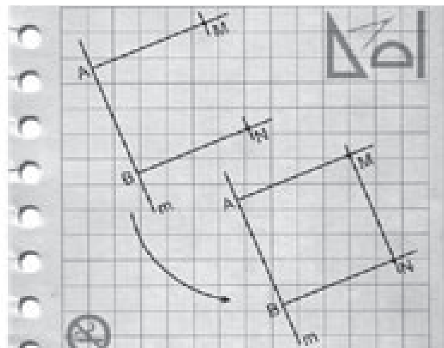


Fig. 14: Construcción de una recta paralela a una dada

11.3. Construir una paralela a una recta dada, que pase por un punto exterior a la recta

Sea *m* la recta y P el punto exterior. Se calcula la distancia existente entre P y *m* (actividad 10.7.) y se conserva con el compás. Ahora se marca un punto A sobre *m* (que no sea el pie de la perpendicular de P a *m*). Se construye una perpendicular a *m* por A (actividad 10.6.) y, sobre esta perpendicular y haciendo centro en A, se marca con el compás un punto Q en el mismo semiplano de P y a la distancia requerida. La recta que pasa por P y Q es la paralela solicitada.

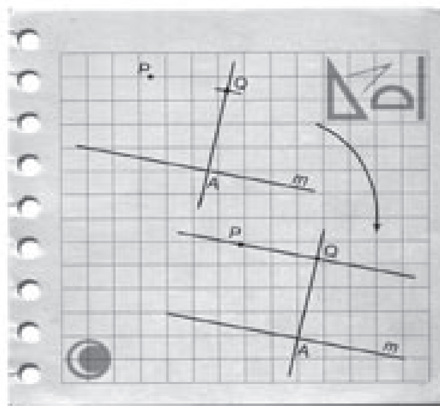


Fig.15: Construcción de una paralela a una recta dada, por un punto exterior a la recta

11.4. Calcular la distancia entre dos rectas paralelas

Se selecciona un punto A de una de las rectas y se calcula la distancia de A hasta la otra recta (actividad 10.7.).

12. Construcciones alternativas con regla y escuadra



Para realizar las actividades anteriores nos hemos referido a la utilización del compás, de la regla y del transportador. Sin embargo, algunas de las construcciones señaladas pueden ser llevadas a cabo mediante el uso combinado de la regla y de la escuadra (o de dos escuadras). Aunque en algunos casos el procedimiento parece más sencillo, siempre se pierde algo de precisión. He aquí algunos de esos procedimientos:

12.1. Construir un ángulo recto (actividad 9.3.)

Basta con trazar a lápiz sendos segmentos pegados a los bordes de los dos catetos (lados que forman el ángulo recto) de la escuadra, desde el vértice del ángulo recto.

12.2. Hallar el punto medio de un segmento (actividad 10.2.)

Simplemente, se mide el segmento completo con la regla, se obtiene la mitad de esta medida y se marca el punto medio M a esa distancia de cualquiera de los extremos.

12.3. Construir la mediatriz de un segmento (actividad 10.1.)

Se coloca el borde de la regla sobre el segmento dado. El borde de uno de los catetos se desliza pegado a la regla, hasta que el vértice del ángulo recto coincida con M, el punto medio del segmento. Apoyando el lápiz sobre el borde del otro cateto, se traza la recta correspondiente.

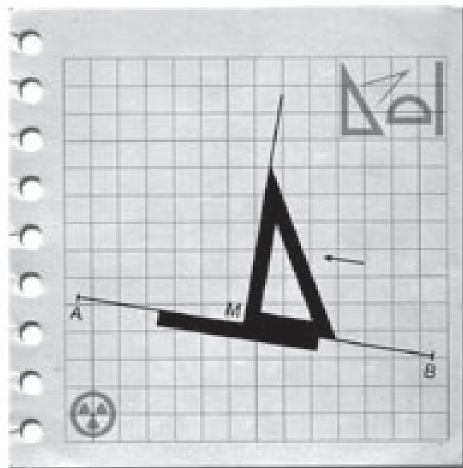


Fig. 16: Construcción de la mediatriz de un segmento utilizando la escuadra

12.4. Construir la perpendicular a una recta desde un punto exterior a la misma (actividad 10.5.)

Sea P el punto exterior a la recta. Se coloca el borde de la regla sobre el segmento dado. El borde de uno de los catetos se desliza pegado a la regla, hasta que P quede en el borde del otro cateto. Entonces, apoyando el lápiz sobre el borde del otro cateto, se traza la recta correspondiente.

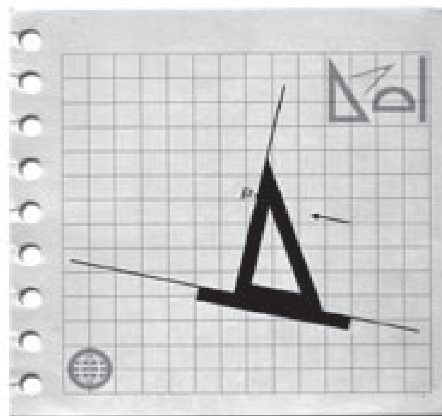


Fig. 17: Construcción de una perpendicular a una recta desde un punto exterior a la misma, utilizando regla y escuadra

12.5. Construir la perpendicular a una recta que pase por un punto de la misma (actividad 10.6.)

El caso es similar a la actividad 12.3.

12.6. Construir rectas paralelas a una dada (actividad 11.2.)

Dada una recta *r*, se coloca la regla de tal manera que al deslizar pegado a ella el borde de uno de los catetos de la escuadra, el borde del otro cateto coincida con la recta *r*. Hecho este ajuste, basta con deslizar la escuadra sobre la regla e ir trazando las paralelas que se deseen.

12.7. Determinar si dos rectas son paralelas (actividad 11.1.)

Es un caso particular de la actividad 12.6.

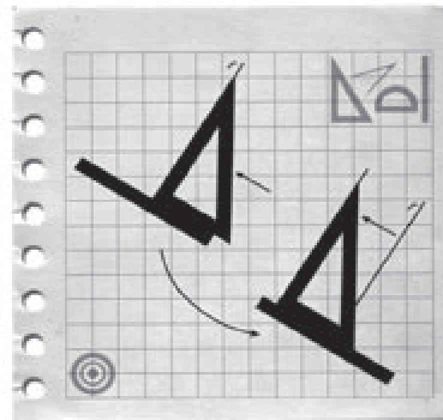


Fig. 18: Construcción de rectas paralelas a una dada, utilizando regla y escuadra

12.8. Construir una paralela a una recta dada, que pase por un punto exterior a la recta (actividad 11.3.)

Es también un caso particular de la actividad 12.6.

12.9. Trasladar un ángulo, corriendo el vértice sobre uno de sus lados (actividad 9.4.)

Es un caso similar al 12.6. Si *r* es la recta sobre la que se va a desplazar el vértice hasta un punto A, se coloca la regla de tal manera que al deslizar pegado a ella el borde de uno de los catetos de la escuadra, el borde del otro cateto coincida con el lado del ángulo que no descansa sobre la recta *r*. Hecho este ajuste, basta con deslizar la escuadra sobre la regla y trazar la paralela a este último lado, que pase por A.

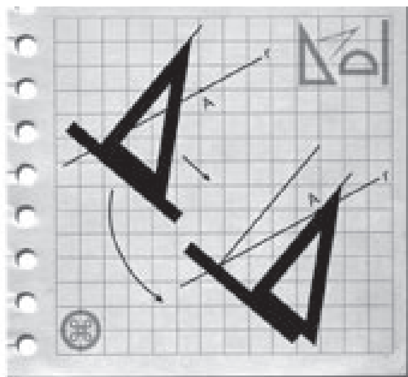


Fig. 19: Traslación de un ángulo sobre una recta, utilizando regla y escuadra

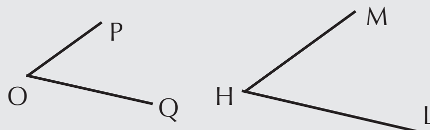
13. Relaciones entre rectas y ángulos

Veamos algunas relaciones más complejas que pueden establecerse entre varias rectas:

18. ¿Qué relación guardan entre sí dos rectas *l* y *m* que son perpendiculares, cada una, a otra recta *r*?
19. Si una recta *l* es perpendicular a una recta *m*, y *n* es paralela a *m*, ¿qué relación existe entre *l* y *n*?
20. Si una recta *l* es perpendicular a una recta *m*, y *n* es paralela a l, ¿qué relación existe entre *n* y *m*?
21. Si una recta *l* es perpendicular a una recta *m*, y a su vez *m* es perpendicular a *n*, ¿qué relación existe entre *n* y *l*?

Existen otras situaciones que revelan ciertas relaciones entre rectas y ángulos. Dos de las más fundamentales son las siguientes:

1) *Si los lados de un ángulo α son, uno a uno, paralelos a los de un ángulo β, y si ambos ángulos son agudos (o ambos rectos, o ambos obtusos), entonces los dos ángulos son congruentes.* Ello se debe a que en ambos casos se ha producido el mismo giro para formar cada ángulo (el resultado de la actividad 9.4. ó 12.9. es un caso particular de esta situación).

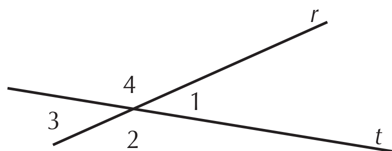


En la figura, OP es paralelo a HM y OQ es paralelo a HL. Entonces, ambos ángulos son congruentes.

2) *Si los lados de un ángulo α son, uno a uno, perpendiculares a los de un ángulo β, y si ambos ángulos son agudos (o ambos rectos, o ambos obtusos), entonces los dos ángulos son congruentes* [La demostración se ofrecerá en el Cuaderno nº 13].

En la figura 7, los ángulos <SOR y < QOP son congruentes, ya que sus lados OS y OR son perpendiculares, respectivamente, a OQ y OP.

Otra situación interesante es la de ***dos rectas secantes*** (no necesariamente perpendiculares) *r* y *t*:



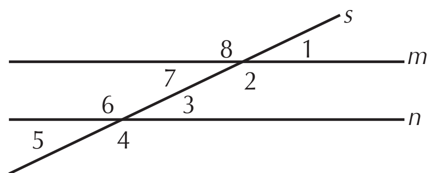
Aparecen cuatro ángulos (numerados del 1 al 4). Entre ellos, por parejas, se establece la relación de ***ángulos opuestos por el vértice***: los formados por las semirrectas *r* y *t*, y por sus prolongaciones en sentidos opuestos. Así, son opuestos por el vértice los ángulos 1 y 3, y los ángulos 2 y 4.

Los ángulos que comparten un vértice y un lado, y que tienen los otros dos lados constituidos por semirrectas opuestas, se denominan ***adyacentes***. En la figura, son pares de ángulos adyacentes los constituidos por los ángulos 1 y 4, 3 y 4, 3 y 2, 2 y 1.

Por definición, la unión de dos ángulos adyacentes genera un ángulo llano; por consiguiente, ***los ángulos adyacentes son suplementarios***. De aquí se deduce que los ***ángulos opuestos por el vértice son congruentes*** (tienen la misma medida), ya que poseen el mismo suplemento; por ejemplo, los ángulos 1 y 3 tienen como suplemento el ángulo 2 (o el ángulo 4).

Este ha sido un pequeño ejemplo de ***demostración***: a partir de la proposición o afirmación “los ángulos adyacentes son suplementarios”, hemos llegado a la proposición “los ángulos opuestos por el vértice son congruentes”. Lo hemos hecho apoyándonos en la certeza de que “dos ángulos que tienen el mismo suplemento son iguales” y observando que, en nuestro caso, “los ángulos opuestos por el vértice tienen el mismo suplemento”. De esta forma ya no dependemos sólo de la figura (aunque nos apoyamos en ella), sino de la fuerza de nuestra argumentación.

Otra de esas situaciones, también estudiada por Euclides, es la que se presenta cuando ***dos rectas paralelas m y n son cortadas por una recta secante s***, no necesariamente perpendicular a las rectas dadas:



Como se ve, aparecen ocho ángulos (numerados del 1 al 8), ligados por diversas relaciones:

• Hay cuatro pares de ***ángulos opuestos*** por el vértice: 1 y 7; 2 y 8; 4 y 6; 5 y 3.

• De alguna manera, esta situación parece "duplicar" la analizada anteriormente; por eso, alrededor de cada punto de intersección de *s* con *m* y *n* se genera la misma situación, y los ángulos se "corresponden" por pares: los ángulos 1 y 3, 8 y 6, 2 y 4, 7 y 5 se denominan, en cada caso, ***correspondientes***.

• Los cuatro ángulos que quedan entre las dos rectas paralelas se denominan ***internos***. Y los otros cuatro, ***externos***. Ya sabemos que son adyacentes los ángulos 1 y 8, 2 y 7, 3 y 6, 4 y 5. Pero también se da otra relación entre pares de ángulos ubicados en lados alternos de la secante *s*. En la región interna, los ángulos 7 y 3, 2 y 6 se denominan, en cada caso, ***alternos internos***. Y en la región externa, los ángulos 8 y 4, 1 y 5 se denominan, en cada caso, ***alternos externos***.

Las relaciones entre las medidas de los diversos tipos de ángulos son muy sencillas; son ***congruentes***:

• Cada par de ángulos opuestos por el vértice.

• Cada par de ángulos correspondientes.

• Cada par de ángulos alternos internos.

• Cada par de ángulos alternos externos.

¿Cómo "demostramos" que dos ángulos correspondientes son congruentes? Sencillamente nos apoyamos en una proposición anterior: "dos ángulos cuyos lados son paralelos, son congruentes". Y como aquí se cumple esa condición para cada par de ángulos correspondientes, concluimos que dos ángulos correspondientes son congruentes.

¿Cómo "demostramos" ahora que dos ángulos alternos internos, por ejemplo 7 y 3, son congruentes? Veamos: 7 es congruente con 1 por ser ambos opuestos por el vértice; y 3 es congruente con 1 por ser ambos correspondientes. Es decir, 7 y 3 son ambos congruentes con 1. Por consiguiente, 7 y 3 son congruentes entre sí.

De una manera similar se puede demostrar que dos ángulos alternos externos, por ejemplo 8 y 4, son congruentes. Inténtelo.

22. Si en la situación anterior, el ángulo 3 mide 50º, ¿cuánto miden todos los demás ángulos?

Las relaciones entre los ángulos anteriores pueden utilizarse ***para determinar si dos rectas son paralelas***. He aquí un procedimiento alternativo de las actividades *11.1.* y *12.7.*: Dadas las dos rectas *r* y *t* supuestamente paralelas, se traza una recta *s* secante a ambas. Se toman las medidas de dos ángulos "alternos internos" (o de dos "correspondientes") y se averigua si son iguales (actividad *9.7.*). En caso afirmativo, *r* y *t* son paralelas.

14. Actividades referidas a bisectrices

Los ángulos también son objeto de manipulación y de estudio. Así como una de las actividades más espontáneas con un segmento es la de dividirlo por la mitad, una muy similar es la de obtener la mitad de un ángulo dado. ***La semirrecta que divide la región interna de un ángulo en dos partes iguales (congruentes) se denomina bisectriz.***

La definición anterior hace referencia a una perspectiva estática del ángulo. Pero si consideramos el ángulo desde una perspectiva dinámica, la bisectriz es la ***semirrecta final que corresponde a un giro cuya amplitud sea la mitad del giro inicial.***

14.1. Construir la bisectriz de un ángulo

Hay un procedimiento que se basa en el uso del transportador: se mide el ángulo original, se obtiene la mitad de esta medida, y en la región interna del ángulo y a partir de uno de los lados, se construye un ángulo que tenga la nueva medida.

Un segundo procedimiento (más exacto) se basa en el uso del compás y la regla. Dado el ángulo <AOB, con una amplitud cualquiera del compás y haciendo centro en el vértice O, trazamos un arco que vaya de lado a lado por la región interna del ángulo. Llamamos M y N, respectivamente, a los puntos de contacto del arco en cada uno de los lados. Desde cada uno de estos puntos y con la misma abertura del compás se trazan sendos arcos hacia el interior del ángulo, de modo que se corten en un punto P. La semirrecta que arranca en O y pasa por P es la bisectriz del ángulo.

Obsérvese que el vértice O equidista de los puntos M y N; también lo hace el punto P. Es decir, ambos puntos pertenecen a la mediatriz del segmento MN. En consecuencia, la mediatriz de este segmento MN, limitada por el vértice O, es la bisectriz del ángulo <AOB.

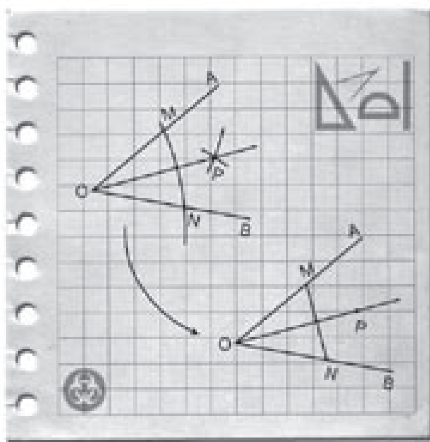


Fig. 20: Construcción de la bisectriz de un ángulo

[En el Cuaderno 13 daremos una demostración para ver que la semirrecta construida de esta manera es la bisectriz del ángulo dado].

14.2. Descubrir la relación existente entre los puntos de la bisectriz de un ángulo y los lados de éste

Hemos dicho antes que la bisectriz de un ángulo es la semirrecta que corresponde a un giro cuya amplitud es la mitad del giro del ángulo inicial. Es decir, que la amplitud del giro desde la bisectriz hacia cada uno de los lados del ángulo inicial es la misma (aunque con orientaciones opuestas). En términos de amplitud del giro, la bisectriz está "a igual distancia" de las dos semirrectas.

Pues bien, ésta es la relación que existe entre los puntos de la bisectriz de un ángulo y los lados de éste: ***todo punto de la bisectriz de un ángulo equidista de los lados del ángulo***. Se puede ratificar esta relación ubicando un punto cualquiera de la bisectriz, calculando las distancias desde el punto a cada uno de los lados (actividad *10.7.*) y verificando que ambas distancias son iguales [En el Cuaderno 13 daremos una demostración de que esta relación es válida para cualquier punto de la bisectriz]. En la figura 21, OP es la bisectriz del ángulo < ROS. Se tiene PR = PS y QM = QN. Pero si P ≠ Q, entonces PR ≠ QM.

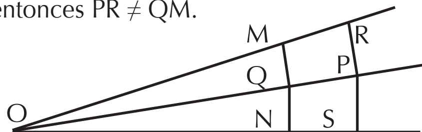


Fig. 21: Los puntos de la bisectriz de un ángulo equidistan de sus lados

Esta relación es tan importante que puede definirse la bisectriz de un ángulo como ***la semirrecta que empieza en el vértice y cuyos puntos equidistan de los lados del ángulo***. Más todavía, si dos puntos de una semirrecta que pasa por el vértice de un ángulo, equidistan de los lados de éste (las distancias desde un punto no tienen por qué ser iguales a las distancias desde el otro), esa semirrecta es la bisectriz del ángulo.

15. Y ahora, otros ejercicios "para la casa"...

A. Hemos construido algunos objetos geométricos utilizando las herramientas habituales en estos casos: regla, escuadra, compás, transportador... No siempre tenemos a mano tales instrumentos, de modo que es bueno ingeniárselas con lo que se dispone. ¿Tiene alguna idea alternativa (sea la que sea y con cualquier material) de cómo:

a) sustituir a un compás?

b) obtener el punto medio de un segmento?

c) trazar la mediatriz de un segmento?

d) trazar la bisectriz de un ángulo?

e) averiguar si dos segmentos son perpendiculares?

f) averiguar si dos segmentos son paralelos?

g) trazar una perpendicular a un segmento desde un punto exterior al mismo?

h) trazar una paralela a un segmento desde un punto exterior al mismo?

i) dibujar puntos equidistantes (a una distancia dada) sobre un segmento, a par-

tir de un punto dado P?

j) construir un ángulo recto?

k) calcular la distancia entre dos rectas paralelas?

B. Algunas de las personas que más experiencia tienen en el manejo de puntos, rectas, ángulos y planos, son los albañiles y maestros de obras. Trate de ubicar a alguno de ellos y averigüe cómo se aseguran de (no sólo cómo lo hacen, sino cómo "validan" lo que hacen):

a) levantar una pared perpendicular al suelo

b) colocar horizontalmente las hileras de ladrillos en una pared

c) construir esquinas de ventanas y puertas en ángulo recto

d) hacer un piso horizontal en todas las direcciones y liso

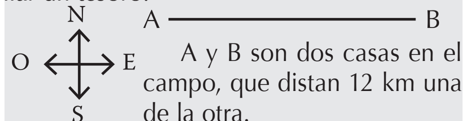
e) colocar baldosas en filas bien alineadas

f) hacer "esquinas curvadas"

C. ¿Puede elaborar un cuestionario similar para el caso de los carpinteros, y hacer la indagación correspondiente?

D. Trate de averiguar, si es posible, qué herramientas y qué técnicas autóctonas utilizan para sus construcciones, las personas de nuestras culturas indígenas más próximas.

23. He aquí unas indicaciones para hallar un tesoro:



A y B son dos casas en el campo, que distan 12 km una de la otra.

Por la campiña discurre un canal de riego, rectilíneo, que viene a ser la mediatriz del segmento AB. Sea M el punto medio de AB. Sobre esa mediatriz y hacia el sur, a 10 km de M está la casa C, y 14 km más allá de C, la casa D. Sobre un camino perpendicular a MD en C y a 12 km hacia el este, está la casa E. Ahora, sobre la bisectriz del ángulo <ECD, y a 15 km de C hacia el sudeste, está la casa F. Por D pasa un camino paralelo a CF. Por este camino, y a 10 km de D hacia el sudeste, está la casa G. Existe un camino perpendicular a DG que pasa por F y que corta a DG en el puente P. Pues bien, viniendo en el sentido de F hacia P y siguiendo 7 km más allá de P, está el tesoro, en el punto T.

Construya un plano a escala (1:100.000) con todas las indicaciones anteriores; y utilizando los procedimientos explicados en el texto para trazar mediatrices, perpendiculares, paralelas y bisectrices, determine gráficamente la ubicación del punto T. ¿Este punto queda al oeste o al este del canal de riego?

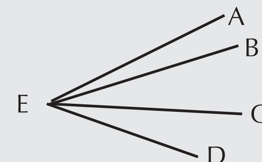
24. Con una lupa que aumenta 4 veces el tamaño de las cosas, se observa un ángulo de 2º. ¿Con qué medida se verá el ángulo a través de la lupa?

25. Averigüe la medida de un ángulo si esta medida es 7/5 de la de su suplementario.

26. ¿Cuántos pares de rectas paralelas hay en la figura?



27. Si el ángulo < AED es agudo, ¿cuántos ángulos agudos hay en la figura?



28. Con estos datos:

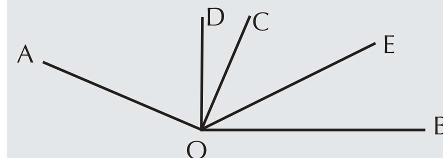
- < AOB es obtuso y mide *a*º,

-OD es bisectriz de < AOB,

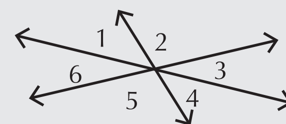
- OC es perpendicular a OA,

-OE es bisectriz de < COB,

¿cuánto mide < DOE?



29. Sea A la suma de las medidas de < 1, < 3 y < 5; y B la suma de las medidas de < 2, < 4 y < 6. ¿Cuánto vale el cociente A/B?



Sin levantar el lápiz del papel, unir los 9 puntos utilizando para ello sólo 4 segmentos





Suele decirse que una mesa de tres patas nunca se balancea, aun cuando las patas no tengan exactamente la misma longitud. ¿Es cierto? Y si lo es, ¿por qué razón?

Referencias Bibliográficas

- Guzmán, M. de (1988). *Aventuras matemáticas*. Barcelona: Labor.

- Husserl, E. (2000). El origen de la geometría. En: J. Derrida, *Introducción a "El origen de la geometría" de Husserl*, pp. 163-192. Buenos Aires: Manantial.

- Pérez Gómez, R. (2002). Construir la geometría. En: F. López R. (Dir.), *La geometría: de las ideas del espacio al espacio de las ideas*, pp. 11-31. Caracas: Laboratorio Educativo.

- Senechal, M. (1998). Forma. En: L. A. Steen (Ed.), *La enseñanza agradable de las matemáticas*, pp. 149-192. México: Limusa.

- Serres, M. (1996). *Los orígenes de la geometría. Tercer libro de las fundaciones*. México: Siglo XXI.

- Steen, L. A. (1998). *La enseñanza agradable de las matemáticas*. México: Limusa.

- van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight. A theory of Mathematics Education*. Orlando: Academic Press.

-Vasco, C. (1999). El archipiélago angular. En: C. Cruz (Ed.), *Memorias III Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*, pp. 74-79. Caracas: ASOVEMAT.

Respuestas de los ejercicios propuestos

1. 18 segmentos **2**. 360° **3**. 180° **4**. 90° **5**. 45° **6**. Menos de 90° **7**. Más de 90° **8**. Una vuelta, más 90° **9**. Dos vueltas, más 280° **10**. Un ángulo llano **11**. Un ángulo recto **12**. 120°; 135°; 170° **13**. Para cualquier ángulo agudo, el ángulo final es el ángulo inicial, más 90° **14**. α y β son congruentes (entre sí) **15**. Son congruentes (entre sí) en ambos casos **16**. La diferencia es de 90º **17**. De ninguna manera: es imposible en ambos casos, pues la recta y la semirrecta no poseen dos puntos extremos **18**. Son paralelas entre sí **19**. Son perpendiculares entre sí **20**. Son perpendiculares entre sí **21**. Son paralelas entre sí **22**. Todos los ángulos agudos miden 50° y todos los ángulos obtusos, 130° **23**. Al oeste **24**. 2° **25**. 105° **26**. 16 pares **27**. 6 ángulos agudos **28**. 45° **29**. 1

Índice

A modo de Introducción **5**

1. ¿Qué es la Geometría? **6**

2. ¿Cómo son los objetos geométricos? **7**

3. ¿Por qué y para qué estudiar geometría? **9**

4. El avance en el aprendizaje de la geometría **10**

5. Nuestra propuesta para el aprendizaje de la geometría **11**

6. Conceptos geométricos elementales: Espacio, plano, línea y punto **11**

7. Construir y medir objetos geométricos: herramientas **14**

8. Actividades referidas a segmentos **14**

9. Actividades referidas a ángulos **16**

10. Actividades referidas a rectas y segmentos perpendiculares **20**

11. Actividades referidas a rectas y segmentos paralelos **22**

12. Construcciones alternativas con regla y escuadra **23**

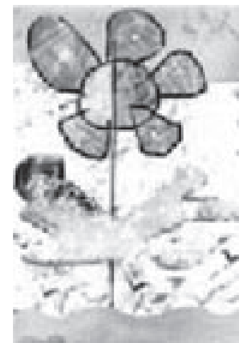
13. Relaciones entre rectas y ángulos **25**

14. Actividades referidas a bisectrices **26**

15. Y ahora, otros ejercicios “para la casa”... **27**

Referencias Bibliográficas **29**

Respuestas de los ejercicios propuestos **29**




FE Y ALEGRIA